Chapter 1

Rappels

1.1 Espace de Hilbert

1.1.1 Forme sesquilinéaire, forme bilinéaire

Définition 1 *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$. Une application*

$$\begin{array}{rcl} \langle\,,\,\rangle : E\times E & \rightarrow & \mathbb{C}; \\ (x,y) & \mapsto & \langle x\,,\,y\rangle, \end{array}$$

*est dite **forme sesquilinéaire** si elle est*

- *linéaire par rapport à la première variable*

$$\forall(\lambda,x_1,x_2,y)\in\mathbb{C}\times E^3,\quad \langle\lambda x_1+x_2\,,\,y\rangle \;=\; \lambda\langle x_1\,,\,y\rangle+\langle x_2\,,\,y\rangle,$$

- *et semi-linéaire par rapport à la deuxième variable*

$$\forall(\lambda,x,y_1,y_2)\in\mathbb{C}\times E^3,\quad \langle x\,,\,\lambda y_1+y_2\rangle \;=\; \overline{\lambda}\langle x\,,\,y_1\rangle+\langle x\,,\,y_2\rangle.$$

*Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, la forme est dite **bilinéaire**.*

Remarque : Si l'espace vectoriel E est complexe, une forme sesquilinéaire est connue partout dès qu'elle est connue sur la diagonale de E. En effet, l'on a l'égalité suivante appelée **identité de polarisation** :

$$\begin{array}{rcl} 4\langle x\,,\,y\rangle & = & \langle x+y\,,\,x+y\rangle-\langle x-y\,,\,x-y\rangle \\ & & +i\langle x+iy\,,\,x+iy\rangle-i\langle x-iy\,,\,x-iy\rangle. \end{array}$$

Par contre, on n'a pas le même résultat pour les formes bilinéaires. En effet, sur $\mathbb{R}^2$, la forme bilinéaire définie par $\langle(x_1,x_2)\,,\,(y_1,y_2)\rangle=x_1y_2-x_2y_1$ est nulle sur la diagonale de $\mathbb{R}^2$ mais est différente de l'application identiquement nulle.

1.1.2 Forme sesquilinéaire hermitienne, forme bilinéaire symétrique

Définition 2 *Une forme sesquilinéaire sur E est dite* ***hermitienne*** *si*

$$\forall (x,y) \in E \times E, \quad \langle x \,,\, y \rangle \quad = \quad \overline{\langle y \,,\, x \rangle}.$$

Si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, la forme bilinéaire est dite ***symétrique****.*

Proposition 1 *Une forme sesquilinéaire sur E est hermitienne si, et seulement si, quel que soit $x \in E$, $\langle x \,,\, x \rangle$ est réel.*

PREUVE : La condition est nécessaire par définition. Si la forme sesquilinéaire est réelle sur la diagonale de E, alors, pour tout $(x,y) \in E^2$,

$$\begin{aligned}\langle x+y \,,\, x+y \rangle &= \langle x \,,\, x \rangle + \langle x \,,\, y \rangle + \langle y \,,\, x \rangle + \langle y \,,\, y \rangle. \\ \langle x+iy \,,\, x+iy \rangle &= \langle x \,,\, x \rangle - i\langle x \,,\, y \rangle + i\langle y \,,\, x \rangle + \langle y \,,\, y \rangle.\end{aligned}$$

Il en résulte que $\langle x \,,\, y \rangle + \langle y \,,\, x \rangle = \alpha \in \mathbb{R}$ et $\langle x \,,\, y \rangle - \langle y \,,\, x \rangle = i\beta \in i\mathbb{R}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\langle x \,,\, y \rangle &= \frac{\alpha + i\beta}{2} \text{ et} \\ \langle y \,,\, x \rangle &= \frac{\alpha - i\beta}{2},\end{aligned}$$

donc $\langle x \,,\, y \rangle = \overline{\langle y \,,\, x \rangle}$. ■

1.1.3 Positivité. Définie-positivité. Inégalité de Schwarz.

Définition 3 *Une forme sesquilinéaire ou bilinéaire est dite* ***semi-définie positive*** *(resp.* ***définie positive****) si, quel que soit $x \in E \setminus \{0\}$, $\langle x \,,\, x \rangle \geq 0$ (resp. $\langle x \,,\, x \rangle > 0$).*

Remarque : Une forme sesquilinéaire semi-définie positive est donc nécessairement hermitienne.

Proposition 2 *Si $\langle \,,\, \rangle$ est une forme sesquilinéaire semi-définie positive (donc hermitienne) ou une forme bilinéaire symétrique semi-définie positive, alors on a l'****inégalité de Schwarz***

$$\boxed{\text{Quel que soit } (x,y) \in E^2,\ |\langle x \,,\, y \rangle| \ \leq \ \langle x \,,\, x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y \,,\, y \rangle^{\frac{1}{2}},}$$

l'égalité n'ayant lieu que pour x et y colinéaires.

PREUVE : Quel que soit $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\langle x+\lambda y\,,\, x+\lambda y\rangle \;=\; \langle x\,,\,x\rangle + \overline{\lambda}\langle x\,,\,y\rangle + \lambda\langle y\,,\,x\rangle + |\lambda|^2\langle y\,,\,y\rangle \;\geq\; 0.$$

Si $\langle x\,,\,y\rangle = 0$, l'inégalité est évidente. Par contre, si $\langle x\,,\,y\rangle \neq 0$, on pose $\lambda = \mu\dfrac{\langle x\,,\,y\rangle}{|\langle x\,,\,y\rangle|}$ où μ est réel. Alors, pour tout $\mu \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle x\,,\,x\rangle + 2\mu|\langle x\,,\,y\rangle| + \mu^2\langle y\,,\,y\rangle \quad\geq\quad 0,$$

ce qui implique que le discriminant est négatif ou nul, c'est-à-dire

$$|\langle x\,,\,y\rangle|^2 \quad\leq\quad \langle x\,,\,x\rangle\langle y\,,\,y\rangle.$$

L'inégalité de Schwarz est toujours vérifiée.

Si x et y sont colinéaires, alors il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $x = \lambda y$ (ou $y = \lambda x$). Alors

$$\begin{aligned}
\langle x\,,\,y\rangle &= \lambda\langle y\,,\,y\rangle \quad \text{et}\\
\langle x-\lambda y\,,\, x-\lambda y\rangle &= \langle x\,,\,x\rangle - \overline{\lambda}\langle x\,,\,y\rangle - \lambda\langle y\,,\,x\rangle + |\lambda|^2\langle y\,,\,y\rangle\\
0 &= \langle x\,,\,x\rangle - |\lambda|^2\langle y\,,\,y\rangle,
\end{aligned}$$

d'où $|\langle x\,,\,y\rangle| = \langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\,,\,y\rangle^{\frac{1}{2}}$.

Réciproquement si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $|\langle x\,,\,y\rangle| = \langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\,,\,y\rangle^{\frac{1}{2}}$, il existe $\theta \in \mathbb{C}$ tel que $|\theta| = 1$ et $\langle x\,,\,y\rangle = \theta\langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}\langle y\,,\,y\rangle^{\frac{1}{2}}$. Alors

$$\langle x - \theta\frac{\langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle y\,,\,y\rangle^{\frac{1}{2}}}y\,,\, x - \theta\frac{\langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle y\,,\,y\rangle^{\frac{1}{2}}}y\rangle \quad=\quad 0,$$

ce qui entraîne que x et y sont colinéaires. ■

1.1.4 Espaces préhilbertiens. Espaces hilbertiens.

Définition 4 *Un espace vectoriel complexe (resp. réel) E muni d'une forme sesquilinéaire hermitienne (resp. forme bilinéaire symétrique) définie positive est appelé espace* ***préhilbertien****. Lorque l'espace vectoriel réel est de dimension finie, on dit plutôt espace* ***euclidien****.*

Proposition 3 *Si E est un espace préhilbertien. Alors l'application*

$$\begin{aligned}
E &\rightarrow \mathbb{R}_+;\\
x &\mapsto \langle x\,,\,x\rangle^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

définie une norme sur E.

PREUVE : Il est immédiat que l'application ainsi définie est à valeurs positives ou nulles. En outre par définition $\langle x\,,\,x\rangle = 0$ est équivalente à $x = 0$.

D'autre part, quel que soit $(\lambda, x) \in \mathbb{C} \times E$, $\langle \lambda x \, , \, \lambda x \rangle^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \langle x \, , \, x \rangle^{\frac{1}{2}}$.
Enfin, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned} \langle x+y \, , \, x+y \rangle &= \langle x \, , \, x \rangle + 2\Re(\langle x \, , \, y \rangle) + \langle y \, , \, y \rangle \\ &\leq \langle x \, , \, x \rangle + 2|\langle x \, , \, y \rangle| + \langle y \, , \, y \rangle \\ &\leq (\langle x \, , \, x \rangle^{\frac{1}{2}} + \langle y \, , \, y \rangle^{\frac{1}{2}})^2. \end{aligned}$$

■

Définition 5 *Soit E un espace préhibertien. On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** si, et seulement si, $\langle x \, , \, y \rangle = 0$.*

Définition 6 *Soient $f = (f_1, \ldots, f_m)$ et $g = (g_1, \ldots, g_n)$ deux familles de m et n éléments d'un espace hilbertien respectivement. On appelle **matrice de Gram** associée au couple (f, g) la matrice*

$$\left(f, g \right) (i, j) \quad = \quad \langle f_j \, , \, g_i \rangle.$$

Proposition 4 *Pour toute matrice $A \in \mathbb{C}^{m \times p}$ et toute matrice $B \in \mathbb{C}^{n \times q}$,*

$$\left(fA, gB \right) \quad = \quad B^* \left(f, g \right) A.$$

PREUVE : Soient deux matrices $A \in \mathbb{C}^{m \times p}$ et $B \in \mathbb{C}^{n \times q}$. Alors les produits $fA = (\sum_{j=1}^{m} f_j A(j, 1), \ldots, \sum_{j=1}^{m} f_j A(j, p))$ et $gB = (\sum_{i=1}^{n} g_i B(i, 1), \ldots, \sum_{j=1}^{n} g_i B(i, q))$ sont deux familles respectivement de p et q éléments de l'espace préhilbertien. Ainsi, pour tout $(r, s) \in \{1, \ldots, q\} \times \{1, \ldots, p\}$,

$$\begin{aligned} \left(fA, gB \right) (r, s) &= \langle \sum_{j=1}^{m} f_j A(j, s) \, , \, \sum_{i=1}^{n} g_i B(i, r) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} A(j, s) \overline{B(i, r)} \langle f_j \, , \, g_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{B(i, r)} \left(\sum_{j=1}^{m} A(j, s) \langle f_j \, , \, g_i \rangle \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{B(i, r)} \left(\sum_{j=1}^{m} \left(f, g \right) (i, j) . A(j, s) \right) \\ &= (B^* \left(f, g \right) A) \, (r, s). \end{aligned}$$

■

Définition 7 *On appelle espace de **Hilbert** ou **hilbertien** un espace préhilbertien qui est complet relativement à la norme $\|x\| = \langle x \, , \, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Dans le cas réel, on dit encore **espace de Banach**.*

Proposition 5 *Soit H un espace de Hilbert et F une partie fermée, convexe, non vide de H. Alors, pour tout $x \in H$, il existe un unique élément $\pi_F(x)$ de F vérifiant*

$$\|x - \pi_F(x)\| = \min_{y \in F} \|x - y\|.$$

Enfin l'application $\pi_F : H \to F$ est lipschitzienne de rapport 1.

PREUVE : Puisque F est non vide, l'ensemble $X = \{\|x - y\| \,|y \in F\}$ est non vide et minoré par 0. Il s'ensuit que $d = \inf X$ existe. Donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $y_\varepsilon \in F$ tel que $d \leq \|x - y_\varepsilon\| < d + \varepsilon$. Comme

$$\begin{aligned} \|y_\varepsilon - y_\eta\|^2 &= 2(\|y_\epsilon - x\|^2 + \|y_\eta - x\|^2) - 4\|x - \frac{y_\varepsilon + y_\eta}{2}\|^2 \\ &< 2((d+\varepsilon)^2 + (d+\eta)^2) - 4\|x - \frac{y_\varepsilon + y_\eta}{2}\|^2. \end{aligned}$$

Comme F est convexe, $\frac{y_\varepsilon + y_\eta}{2} \in F$ et donc $\|x - \frac{y_\varepsilon + y_\eta}{2}\| \geq d$, d'où

$$\|y_\varepsilon - y_\eta\|^2 < 4d(\varepsilon + \eta) + 2(\varepsilon^2 + \eta^2)$$

ce qui permet de conclure que la suite $(y_n = y_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy. Alors H étant un espace de Hilbert et F étant fermé, la limite y de cette suite appartient à F. D'où $d = \min X$.

Soient y et y' deux points de F qui réalise le minimum d, alors le théorème de Pythagore appliqué au triangle de sommets x, y et y' entraîne que $y = y'$. Il s'ensuit que l'application $\pi_F : H \to F$ est bien définie.

Enfin montrons l'inéquation variationnelle :

$$\forall y \in F \quad \Re(\langle y - \pi_F(x)\,,\, x - \pi_F(x)\rangle) \leq 0$$

supposons que l'inéquation variationnelle soit fausse. Alors il existe $y_1 \in F$ tel que $\Re(\langle y_1 - \pi_F(x)\,,\, x - \pi_F(x)\rangle) > 0$. Comme F est convexe, pour tout $\lambda \in [0,1]$, le vecteur $\lambda y_1 + (1-\lambda)\pi_F(x)$ appartient à F. Mais alors

$$\begin{aligned} \|x - (\lambda y_1 + (1-\lambda)\pi_F(x))\|^2 &= \|x - \pi_F(x)\|^2 + \lambda^2\|y_1 - \pi_F(x)\|^2 \\ &\quad -2\lambda\Re(\langle y_1 - \pi_F(x)\,,\, x - \pi_F(x)\rangle) \end{aligned}$$

Le coefficient de λ est strictement négatif en vertu de notre hypothèse. Pour λ suffisamment petit non nul, le terme en λ^2 est strictement dominé par le terme en λ et par conséquent la somme algébrique des deux derniers termes est strictement négative. Par suite dans ce cas $\|x - (\lambda y_1 + (1-\lambda)\pi_F(x))\|^2 < \|x - \pi_F(x)\|^2$, ce qui est contradictoire.

Réciproquement supposons que l'inéquation variationnelle soit vraie. Alors, pour tout $y \in F$,

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - \pi_F(x)\|^2 + \|y - \pi_F(x)\|^2 - 2\Re(\langle x - \pi_F(x)\,,\, y - \pi_F(x)\rangle) \\ &\leq \|x - \pi_F(x)\|^2, \end{aligned}$$

ce qui est le résultat annoncé. ■

Corollaire 1 *Soit E un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé de E. Si $F \neq E$, alors $F^\perp \neq \{0\}$ et $E = F \oplus F^\perp$.*

PREUVE : Soit $x \in E \setminus F$. Par hypothèse, $x \neq 0$. D'après le théorème précédent, il existe $y = \pi_F(x) \in F$ tel que $x - y \in F^\perp$. En effet, s'il existe $z \in F$ tel que $\langle x - y\,,\, z\rangle \neq 0$, alors $z \neq 0$ et pour $\lambda = \dfrac{\overline{\langle x - y\,,\, z\rangle}}{\|z\|^2}$,

$$\begin{aligned} \|x - y - \lambda z\|^2 &= \|x - y\|^2 - 2\Re(\lambda\langle x - y\,,\, z\rangle) + |\lambda|^2\|z\|^2 \\ &= \|x - y\|^2 - \frac{|\langle x - y\,,\, z\rangle|^2}{\|z\|^2} \\ &< \|x - y\|^2, \end{aligned}$$

ce qui est impossible. Il en résulte que $F^\perp \neq \{0\}$. Enfin, comme $F \cap F^\perp = \{0\}$, il s'ensuit que $E = F \oplus F^\perp$. ■

Corollaire 2 *Soit E un espace de Hilbert et X un sous-ensemble de E. Alors l'epace vectoriel engendré par X est dense dans E si, et seulement si, $X^\perp = \{0\}$.*

PREUVE : Soit F le sous-espace vectoriel engendré par X. Alors $X^\perp = F^\perp$. Si F est dense dans E, alors tout vecteur orthogonal à X est nul. Si F n'est pas dense, alors son adhérence est différente de E et pour tout vecteur x n'appartenant pas à l'adhérence de F, $x - \pi_F(x)$ est non nul et orthogonal à X. ■

Définition 8 *Soit E un espace Hilbert. On appelle* ***fonctionnelle linéaire continue*** *sur E toute forme linéaire $f : E \to \mathbb{C}$ telle que*

$$\sup\{|f(x)| \,|\, x \in E \text{ et } \|x\| = 1\} \quad < \quad +\infty.$$

On note E' l'espace vectoriel des fonctionnelles linéaires continues sur E. On dit aussi qu'il est le ***dual topologique*** *de E.*

Théorème 1 [THÉORÈME DE RIESZ] *Soit H un espace de Hilbert. Une fonctionnelle linéaire ℓ sur H est continue si, et seulement si, il existe $x_\ell \in H$ tel que, quel que soit $x \in H$, $\ell(x) = \langle x\,,\, x_\ell\rangle$. (En outre x_ℓ est unique).*

PREUVE : Quel que soit $x \in H$, l'application $y \mapsto \langle y\,,\, x\rangle$ est une fonctionnelle linéaire continue d'après l'inégalité de Schwarz.

Réciproquement, soit $\ell \in H'$. Alors $\ker \ell = \{x \in H \,|\, \ell(x) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. Si $\ker \ell = H$, alors $\ell = 0$ et $x_\ell = 0$ satisfait l'égalité. Sinon, on pose $E = (\ker \ell)^\perp$ le supplémentaire orthogonal de $\ker \ell$ dans H. Comme, d'après le corollaire précédent, $E \neq \{0\}$, il existe $y_\ell \in E \setminus \{0\}$. Alors, pour tout $x \in H$,

$$\ell(\ell(x)y_\ell - \ell(y_\ell)x) \quad = \quad 0,$$

donc $\ell(x)y_\ell - \ell(y_\ell)x$ appartient à $\ker \ell$. Comme $y_\ell \in E$, on a

$$0 \quad = \quad \langle \ell(x)y_\ell - \ell(y_\ell)x\,,\, y_\ell\rangle \;=\; \ell(x)\langle y_\ell\,,\, y_\ell\rangle - \ell(y_\ell)\langle x\,,\, y_\ell\rangle.$$

Il s'ensuit que $x_\ell = \dfrac{\ell(y_\ell)y_\ell}{\langle y_\ell\,,\,y_\ell\rangle}$ satisfait l'égalité.

On suppose maintenant qu'il existe deux vecteurs x_ℓ et x'_ℓ tels que l'égalité soit vérifiée. Alors, quel que soit $x \in H$, on a $\langle x\,,\,x_\ell - x'_\ell\rangle = 0$ donc en particulier pour $x = x_\ell - x'_\ell$, $\|x_\ell - x'_\ell\|^2 = 0$ ou autrement dit $x_\ell = x'_\ell$. ■

Remarque : Ce résultat est faux pour un espace préhilbertien non complet. En effet, prenons par exemple, $C^0([0,1])$, l'espace vectoriel complexe des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{C}$ muni du produit scalaire $\langle f\,,\,g\rangle = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$. C'est bien un espace préhilbertien non complet : la suite d'applications $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$f_n(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,\frac{1}{2}], \\ 0 & \text{si } x \in [\frac{n+3}{2(n+1)},1], \\ \dfrac{n+3}{2} - (n+1)x & \text{sinon,} \end{cases}$$

converge vers l'indicatrice de l'intervalle fermé $[0,\frac{1}{2}]$ qui n'est pas continue sur $[0,1]$.

Toutefois l'application

$$\begin{aligned} \ell : C^0([0,1]) &\to \mathbb{C}; \\ f &\mapsto \int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\,dt \end{aligned}$$

est une forme linéaire continue qui ne s'exprime en aucune manière de la forme $\langle .\,,\,z\rangle$ avec $z \in C^0([0,1])$.

1.2 Distributions

1.2.1 Rappels sur les distributions de Schwartz (cas d'une variable)

Soit Ω un ouvert de la droite numérique. On note $\mathfrak{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions numériques définies sur Ω, qui sont indéfiniment dérivables sur Ω et à support compact dans Ω.

Le **support** d'une fonction ψ est l'ensemble $\text{supp}\,(\psi) = \overline{\{x \in \Omega \,|\, \psi(x) \neq 0\}}$.

Exemple: Soit $\Omega =]-1,1[$. Pour tout $a \in]0,1[$, la fonction

$$\begin{aligned} \psi_a : \Omega &\to \mathbb{R}; \\ t &\mapsto \begin{cases} e^{-\dfrac{1}{1-t^2/a^2}} & \text{si } |t| < a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

appartient à $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Définition 9 [CONVERGENCE DANS $\mathfrak{D}(\Omega)$] *On dit qu'une suite* $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dans* $\mathfrak{D}(\Omega)$ *est dite* ***convergente*** *vers* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ *si*

(i) il existe un compact K *inclus dans* Ω *tel que* $\operatorname{supp}(\varphi_n) \subset K$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset K$*,*

(ii) pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi^{(p)} - \varphi_n^{(p)}\|_{K,\infty} = 0$.

Définition 10 *On appelle* ***distribution de Schwartz*** *une fonctionnelle linéaire* T *sur* $\mathfrak{D}(\Omega)$*,*

$$\begin{array}{rcl} T : \mathfrak{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R}; \\ \varphi & \mapsto & \langle T\,,\,\varphi\rangle \end{array}$$

qui vérifie la propriété de continuité suivante :

$$\text{si } \psi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{alors } \lim_{n\to\infty} \langle T\,,\,\psi_n\rangle \;=\; 0.$$

Exemples :

1. Soit f une fonction localement intégrable. Alors la fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} T_f : \mathfrak{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R}; \\ \varphi & \mapsto & \displaystyle\int_\Omega \varphi(x) f(x)\,dx \end{array}$$

est une distribution que l'on note encore f par abus d'écriture. En effet si $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui converge vers 0 dans $\mathfrak{D}(\Omega)$, on notera K le compact qui est un sur-ensemble des supports des ψ_n. On pose $c = \int_K |f(x)|\,dx$ qui est bien définie puisque f est localement intégrable. Alors, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraîne $\|\psi_n\|_{K,\infty} \leq \dfrac{\varepsilon}{c+1}$. Il en résulte que

$$\begin{array}{rcl} \left|\displaystyle\int_\Omega \psi_n(x) f(x)\,dx\right| & = & \left|\displaystyle\int_K \psi_n(x) f(x)\,dx\right| \\ & \leq & \displaystyle\int_K |\psi_n(x)||f(x)|\,dx \\ & \leq & \|\psi_n\|_{K,\infty} \displaystyle\int_K |f(x)|\,dx \;<\; \varepsilon. \end{array}$$

2. Soit $a \in \Omega$. Alors la fonctionnelle

$$\begin{array}{rcl} \delta_a : \mathfrak{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R}; \\ \varphi & \mapsto & \langle \delta_a\,,\,\varphi\rangle = \varphi(a) \end{array}$$

est une distribution que l'on appelle **dirac** en a.

Proposition 6 [THÉORÈME DE SCHWARTZ] *Soient f et g deux fonctions localement intégrables. Alors f et g définissent la même distribution si, et seulement si, $f = g$* p.p.

PREUVE : si $f = g$ p.p, alors, quel que soit $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, $\psi.f = \psi.g$ p.p, donc $\langle T_f\,,\,\psi\rangle = \langle T_g\,,\,\psi\rangle$.

Par contre si il existe un ensemble A de mesure non nulle inclus dans Ω tel que $\forall x \in A$, $f(x) > g(x)$. On peut supposer sans perdre la généralité que A est borné. Soit $\chi_{\overline{A}}$ la fonction caractéristique de $\overline{A}$. Il est immédiat que $\int_{\overline{A}}(f-g)(x)\,dx > 0$. Il existe une suite de fonctions $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathfrak{D}(\Omega)$ telles que

$$\forall x \in \Omega, \quad \lim_{n\to\infty} \psi_n(x) \quad = \quad \chi_{\overline{A}}(x).$$

Il s'ensuit que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi_n(x)(f(x)-g(x))\,dx \quad = \quad \int_{\overline{A}} (f-g)(x)\,dx,$$

ce qui permet de conclure qu'il existe une application $\psi \in \mathfrak{D}(\Omega)$ telle que

$$\langle T_f\,,\,\psi\rangle \quad \neq \quad \langle T_g\,,\,\psi\rangle.$$

■

Définition 11 *Soit T une distribution sur Ω. On appelle dérivée $j^{\text{ème}}$ de T la distribution notée $\frac{d^jT}{dx^j}$ définie par*

$$\langle \frac{d^jT}{dx^j}\,,\,\psi\rangle \quad = \quad (-1)^j\langle T\,,\,\psi^{(j)}\rangle.$$

Exemple : Dérivée distribution d'une fonction f localement intégrable. On suppose que f est une fonction continue et dérivable sur $]-\infty, a[\cap\Omega$ et sur $]a, +\infty[\cap\Omega$ admettant une limite à gauche $f(a-0)$ et à droite $f(a+0)$ non continue en a (c'est-à-dire $f(a-0) \neq f(a+0)$). Alors

$$\begin{aligned}\langle \frac{dT_f}{dx}\,,\,\psi\rangle &= -\int_\Omega f(x)\psi'(x)\,dx \\ &= -\int_{]-\infty,a[\cap\Omega} f(x)\psi'(x)\,dx - \int_{]a,+\infty[\cap\Omega} f(x)\psi'(x)\,dx\end{aligned}$$

On fait successivement une intégration par parties sur $]-\infty, a[\cap\Omega$ puis sur $]a, +\infty[\cap\Omega$ et on obtient

$$\begin{aligned}\langle \frac{dT_f}{dx}\,,\,\psi\rangle &= -f(a-0)\psi(a) + \int_{]-\infty,a[\cap\Omega} f'(x)\psi(x)\,dx \\ &\quad +f(a+0)\psi(a) + \int_{]a,+\infty[\cap\Omega} f'(x)\psi(x)\,dx \\ &= (f(a+0)-f(a-0))\langle\delta_a\,,\,\psi\rangle + \langle T_{f'}\,,\,\psi\rangle,\end{aligned}$$

d'où $\dfrac{dT_f}{dx} = (f(a+0) - f(a-0))\delta_a + T_{f'}$.

1.2.2 L'espace des distributions $H^1(a,b)$

Définition 12 *Soit $\Omega =]a,b[$ un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$. On note*

$$H^1(a,b) \quad = \quad \left\{ T \in \mathfrak{D}'(a,b) \,|\, T \in L^2(a,b), \ \frac{dT}{dx} \in L^2(a,b) \right\}$$

où $T \in L^2(a,b)$ signifie qu'il existe $f \in L^2(a,b)$ telle que $\forall \psi \in \mathfrak{D}(a,b)$, $\langle T \,,\, \psi \rangle = \int_\Omega f(x)\psi(x)\,dx$.

Ainsi, $f \in H^1(a,b)$ signifie que $f(x)$ est définie presque partout et vérifie

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \quad < \quad \infty,$$

et qu'il existe une application g_f définie presque partout sur $]a,b[$, de carré sommable et que

$$\begin{aligned} \langle \frac{dT}{dx} \,,\, \psi \rangle \quad &= \quad \int_a^b f(x)\psi'(x)\,dx \\ &= \quad \int_a^b g_f(x)\psi(x)\,dx. \end{aligned}$$

Proposition 7 *Si $f \in H^1(a,b)$, alors f est égale presque partout à une fonction continue et dérivable presque partout.*

PREUVE : Soit g_f la fonction définie dans la question précédente. On note G l'application définie par

$$\forall x \in]a,b[, \quad G(x) \quad = \quad \int_a^x g_f(t)\,dt$$

et, comme g_f est une fonction de carré intégrable,

$$\mathcal{I} \quad = \quad \int_a^b |g_f(t)|^2\,dt.$$

Quel que soit $\varepsilon > 0$, l'ensemble

$$A_\varepsilon \quad = \quad \left\{ x \in]a,b[\,|\, |g_f(x)| \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

est un ensemble mesurable dont la mesure $m(A_\varepsilon)$ vérifie

$$\begin{aligned} m(A_\varepsilon)\frac{1}{\varepsilon} &\leq \int_{A_\varepsilon} |g_f(t)|\,dt \\ &= \sqrt{\int_{A_\varepsilon} |g_f(t)|^2\,dt}\sqrt{m(A_\varepsilon)} \\ &= \sqrt{\int_a^b |g_f(t)|^2\,dt}\sqrt{m(A_\varepsilon)}, \end{aligned}$$

d'où $m(A_\varepsilon) \leq \varepsilon^2 \mathcal{I}$. Il s'ensuit que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \left(\dfrac{\varepsilon}{\mathcal{I}+1}\right)^2$,

$$\begin{aligned} |G(x+\eta) - G(x)| &= \left|\int_x^{x+\eta} g_f(t)\,dt\right| \\ &\leq \int_x^{x+\eta} |g_f(t)|\,dt \\ &\leq \int_{[x,x+\eta]\cap A_{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}} |g_f(t)|\,dt + \int_{[x,x+\eta]\setminus A_{\frac{1}{\sqrt{\eta}}}} |g_f(t)|\,dt \\ &\leq \sqrt{m(A_{\frac{1}{\sqrt{\eta}}})\mathcal{I}} + \eta\frac{1}{\sqrt{\eta}} \ = \ +\sqrt{\eta}(\mathcal{I}+1) \ \leq \ \varepsilon \end{aligned}$$

D'autre part, quelle que soit la subdivision $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans l'intervalle $[a, b]$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} |G(x_{i+1}) - G(x_i)| &= \sum_{i=1}^{n-1} \left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} g_f(t)\,dt\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g_f(t)|\,dt \\ &\leq \mathcal{I}\sqrt{x_n - x_1} \end{aligned}$$

La fonction G est absolument continue, c'est-à-dire qu'elle est continue et dérivable presque partout au sens usuel et qu'alors sa dérivée en un point $x \in]a, b[$ est égal à $g_f(x)$. ■

Chapter 2

Les espaces hilbertiens de fonctions à noyaux reproduisants

2.1 Notations–Définitions

NOTATIONS

X	ensemble ou domaine de définitions des fonctions (généralement une partie de $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$)
H	espace de Hilbert de fonctions, c'est-à-dire $H \subset \mathbb{C}^X$,
$\langle \psi \, , \, \phi \rangle$	désigne le produit scalaire de ψ et ϕ dans H
$\\|\psi\\| = \sqrt{\langle \psi \, , \, \psi \rangle}$	désigne la norme associée à ce produit scalaire
$x, y, \ldots$	désignent des points de X.

Définition 13 *Une fonction K définie sur $X \times X$ est dite* ***noyau reproduisant*** *de l'espace hilbertien H si*

(i) $\forall x \in X, \quad K_x = K(., x) \in H,$

(ii) $\forall (\psi, x) \in H \times X, \quad \langle \psi \, , \, K_x \rangle = \psi(x).$

2.2 Propriétés d'un noyau reproduisant

Proposition 8 [Théorème d'existence et d'unicité] *Une condition nécessaire et suffisante pour que H admette un noyau reproduisant est que les fonctionnelles d'évaluation (de Dirac) soient continues :*

$$\forall x \in X, \qquad \delta_x \quad \in \quad H'.$$

Un tel noyau est alors unique.

PREUVE :

Condition nécessaire Si H admet un noyau K, on a, pour tout $x \in X$,

$$\delta_x(\psi) \;=\; \psi(x) \;=\; \langle \psi \,,\, K_x \rangle,$$

ce qui prouve que δ_x appartient à H' (K_x *est le représentant dans* H *de* δ_x).

Condition suffisante Si, pour tout $x \in X$, δ_x appartient à H', d'après le théorème de Riesz, on peut associer à δ_x un unique élément K_x de H vérifiant

$$\forall \psi \in H, \qquad \langle \psi \,,\, K_x \rangle \;=\; \delta_x(\psi) \;=\; \psi(x).$$

On définit alors sur $X \times X$ la fonction K par $K(x, y) := K_y(x)$. Il s'ensuit que $\langle \psi \,,\, K_x \rangle = \psi(x)$. Alors K est bien un noyau reproduisant de H.

l'unicité découle du théorème de Riesz. ■

Proposition 9 [PROPRIÉTÉ DE DENSITÉ] *Si H admet un noyau reproduisant K, la famille $\mathfrak{F} = \{K_x \,|\, x \in X\}$ est* ***totale*** *(i.e. $\mathfrak{F}^\perp = \{0\}$).*

Théorème 2 [THÉORÈME DE CARACTÉRISATION] *Une fonction K définie sur $X \times X$ est le noyau reproduisant d'un espace hilbertien $H \subset \mathbb{C}^X$ si, et seulement si*

i) $\forall (x, y) \in X \times X$, $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$ *(on dira que K est hermitien),*

ii) K est de ***type positif****, c'est-à-dire*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{C}^n, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i \overline{A_j} K(x_i, x_j) \;\geq\; 0.$$

PREUVE :

Condition nécessaire Soit K le noyau reproduisant de H. Alors pour tout $\psi \in H$ et tout $x \in X$, $\langle \psi \,,\, K_x \rangle = \psi(x)$ et donc, en particulier, pour tout $(x, y) \in X \times X$, $\langle K_x \,,\, K_y \rangle = K(x, y)$. Il s'ensuit que

$$K(x, y) \;=\; K_y(x) \;=\; \langle K_y \,,\, K_x \rangle \;=\; \overline{\langle K_x \,,\, K_y \rangle} \;=\; \overline{K(y, x)}.$$

Donc i) est vérifiée.

D'autre part, si $h = \sum_{i=1} A_i K_{x_i}$, on a

$$\|h\|^2 \;=\; \langle h \,,\, h \rangle \;=\; \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_i \overline{A_j} K(x_i, x_j),$$

ce qui implique que la condition ii) est aussi vérifiée.

Condition suffisante Soit K définie sur $X \times X$, hermitienne et de type positif. Alors on peut lui associer un espace hermitien H de noyau reproduisant K.

Considérons le sous-espace vectoriel complexe H_0 de C^X engendré par la famille $(K_x)_{x \in X}$. Alors pour tout couple $(f_1, f_2) \in H_0 \times H_0$, il existe deux entiers n_1 et n_2, deux familles de points de X, $(x_i)_{i \in \{1,\dots,n_1\}}$ et $(y_j))_{j \in \{1,\dots,n_2\}}$, et deux familles de nombres complexes, $(A_i))_{i \in \{1,\dots,n_1\}}$ et $(B_j))_{j \in \{1,\dots,n_2\}}$ tels que

$$f_1 \;=\; \sum_{i=1}^{n_1} A_i K_{x_i} \quad \text{et} \quad f_2 \;=\; \sum_{j=1}^{n_2} B_j K_{y_j}.$$

On pose alors $[f_1, f_2] = \displaystyle\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} A_i \overline{B_j} K(x_i, y_j)$.

La correspondance $(f_1, f_2) \rightsquigarrow [f_1, f_2]$ est une application et même une forme sesquilinéaire sur H_0. On montre donc tout d'abord que $[f_1, f_2]$ ne dépend que de f_1 et de f_2 et non de son écriture en fonction de la famille $(K_x))_{x \in X}$. En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}
[f_1, f_2] &= \sum_{i=1}^{n_1} A_i \left(\sum_{j=1}^{n_2} \overline{B_j} K(x_i, y_j) \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n_1} A_i \left(\overline{\sum_{j=1}^{n_2} B_j K(y_j, x_i)} \right) = \sum_{i=1}^{n_1} A_i \overline{f_2(x_i)}, \\
&= \sum_{j=1}^{n_2} \overline{B_j} \left(\sum_{i=1}^{n_1} A_i K(x_i, y_j) \right) = \sum_{j=1}^{n_2} \overline{B_j} f_1(y_j).
\end{aligned}$$

Il résulte alors des hypothèses faites sur K que l'application $(f_1, f_2) \mapsto [f_1, f_2]$ est une forme sesquilinéaire.
Ainsi $(H_0, [,])$ est un espace préhilbertien. Mais si $f_1 = 0$, il est immédiat que $[f_1, f_2] = 0$ pour tout $f_2 \in H_0$. Réciproquement, si $[f_1, f_1] = 0$, alors, d'après l'inégalité de Schwarz, $[f_1, f_2]^2 \leq [f_1, f_1]\,[f_2, f_2] = 0$ pour tout $f_2 \in H_0$. Il s'ensuit que, pour tout $x \in X$,

$$f_1(x) \;=\; [f_1, K_x] \;=\; 0, \quad \text{c'est-à-dire que } f_1 = 0.$$

Donc $(H_0, [,])$ est un espace préhilbertien séparé.

COMPLETION DE H_0. Soit $\mathcal{C}_{H_0}$ l'ensemble des suites de Cauchy de H_0 pour la norme $\|f\|_{H_0} = \sqrt{[f,f]}$. Soit $\mathfrak{R}$ la relation binaire sur $\mathcal{C}_{H_0}$ définie par

$$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\mathfrak{R}\,(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{si, et seulement si} \quad \lim_{n\to+\infty} \|f_n - h_n\|_{H_0} = 0.$$

Cette relation est une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}_{H_0}$. La réflexivité est immédiate tout comme la symétrie. La transitivité résulte de l'inégalité triangulaire de la norme $\|\ \|_{H_0}$. Il s'ensuit que l'espace quotient $\widehat{H_0} = \mathcal{C}_{H_0}/\mathfrak{R}$ est un espace hilbertien où le produit scalaire dans $\widehat{H_0}$ est défini par $\langle \widehat{f}\,,\,\widehat{h}\rangle = \lim_{n\to+\infty}[f_n, h_n]$ où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{f}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{h}$. En effet $\langle \widehat{f}\,,\,\widehat{h}\rangle$ existe car la suite $[f_n, h_n]$ est une suite de Cauchy dans C :

$$\begin{aligned}
|[f_n,h_n] - [f_m,h_m]| &= |[f_n,h_n] - [f_m,h_n] + [f_m,h_n] - [f_m,h_m]| \\
&\leq |[f_n,h_n] - [f_m,h_n]| + |[f_m,h_n] - [f_m,h_m]| \\
&\leq \|f_m - f_n\|_{H_0}\|h_n\|_{H_0} + \|h_m - h_n\|_{H_0}\|f_m\|_{H_0}
\end{aligned}$$

et, si $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widehat{f}$,

$$|[f_n,h_n] - [k_n,h_n]| \leq \|f_n - k_n\|_{H_0}\|h_n\|_{H_0}.$$

Alors l'espace $\widehat{H_0}$ est un espace de Hilbert. S'il est vrai que, comme tout complèté, $\widehat{H_0}$ n'est pas maniable, nous avons toutefois la propriété suivante :

Proposition 10 *Quelle que soit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_{H_0}$, la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers $f \in \mathbb{C}^X$ que l'on notera $f = \lim_{n\to+\infty}\text{simple}\, f_n$. En outre si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}\,\mathfrak{R}\,(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alors $\lim_{n\to+\infty}\text{simple}\, f_n = \lim_{n\to+\infty}\text{simple}\, h_n$.*

PREUVE : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{H_0}$. Comme, dans H_0, on a $f_n(P) = [f_n, K_x]$ pour tout $x \in X$, alors

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f_m(x)| &= |[f_n,K_x] - [f_m,K_x]| \\
&= \|[f_n - f_m, K_x]| \\
&\leq \|f_n - f_m\|_{H_0}\|K_x\|_{H_0}.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$. Ainsi il existe une application $f : X \to \mathbb{C}$ qui est limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{C}^X$.

Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{H_0}$ telle que $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\mathfrak{R}\, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors

$$\begin{aligned} |f_n(x) - h_n(x)| &= |[f_n, K_x] - [h_n, K_x]| \\ &= \|[f_n - h_n, K_x]| \\ &\leq \|f_n - h_n\|_{H_0} \|K_x\|_{H_0}. \end{aligned}$$

Donc les deux suites de Cauchy, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite dans $\mathbb{C}$ et ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{simple}\, f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{simple}\, h_n$.
Réciproquement soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{H_0}$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{simple}\, f_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{simple}\, h_n$. On pose $r_n = f_n - h_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme une combinaison linéaire de suites de Cauchy est une suite de Cauchy, la suite $\|r_n\|_{H_0}$ est bornée par une valeur A et, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété $n \geq N_0$ entraîne que $\|r_n - r_N\|_{H_0} < \dfrac{\varepsilon}{2A}$. Comme r_{N_0} est élément de H_0, il existe un entier p, une famille finie de points de X, $(y_1, \ldots, y_p)$ et une famille finie de scalaires $(B_1, \ldots, B_p)$ tels que $r_{N_0} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} B_i K_{y_i}$. Il s'ensuit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[r_n, r_{N_0}] \;=\; \left[r_n, \sum_{i=1}^{p} B_i K_{y_i} \right] \;=\; \sum_{i=1}^{p} \overline{B_i} r_n(y_i).$$

Comme $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ponctuellement vers 0 dans $\mathbb{C}^X$, il existe une famille finie d'entiers $(N_1, \ldots, N_p)$ telle que, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N_i \implies |r_n(y_i)| \;<\; \frac{\varepsilon}{2p(|B_i| + 1)}.$$

Il en résulte que $N = \max\{N_i \,|\, i \in \{0, \ldots, p\}\}$ est tel que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ entraîne que

$$\begin{aligned} \|r_n\|_{H_0}^2 &= [r_n, r_n] \;=\; [r_n - r_{N_0}, r_n] + [r_{N_0}, r_n] \\ &\leq |[r_n - r_{N_0}, r_n]| + |[r_{N_0}, r_n]| \\ &\leq \|r_n - r_{N_0}\|_{H_0} \|r_n\|_{H_0} + \sum_{i=1}^{p} |B_i|\, |r_n(y_i)| \\ &< \varepsilon \left(\frac{A}{2A} + \sum_{i=1}^{p} \frac{1}{2p} \right) \;=\; \varepsilon. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|r_n\|_{H_0} = 0$ ou autrement dit que l'on a

$$(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\mathfrak{R}\, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

En résumé, il y a une correspondance biunivoque entre les éléments de $\widehat{H_0}$ et ceux qui sont limites ponctuelles de suites de Cauchy de H_0. On notera H cet ensemble qui, muni du produit scalaire $\langle\, ,\, \rangle$ défini par, pour tout $(f, h) \in H \times H$,

$$\langle f\, ,\, h\rangle \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} [f_n, h_n],$$

où $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy dans H_0 telles que $f = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{simple}\, f_n$ et $h = \lim\limits_{n\to+\infty} \text{simple}\, h_n$.

L'espace hilbertien de fonctions H ainsi défini admet K comme noyau reproduisant. En effet,

Pour tout $x \in X$, K_x appartient à H_0 et donc la suite constante $(K_x)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans H_0 qui converge vers K_x. Donc K_x est un élément de H.

Pour tout $f \in H$ et tout point $x \in X$, on a, d'après ci-dessus, pour toute suite de Cauchy dans H_0, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de limite ponctuelle f

$$\begin{aligned}\langle f\, ,\, K_x\rangle \quad &= \quad \lim_{n\to+\infty} [f_n, K_x] \quad = \quad \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \\ &= \quad f(x)\end{aligned}$$

■

Dans la pratique, on peut considérer les deux problèmes inverses l'un de l'autre :

P_1 *Trouver K lorsqu'elle existe à partir de H.*

P_2 *Trouver H associé à un noyau K.*

2.3 Espaces hilbertiens à noyaux reproduisants en théorie de l'approximation

Dans cette section, nous étudions les propriétés les plus intéressantes des espaces à noyaux reproduisants, dans le domaine de l'approximation.

Dans ce qui suit, il est implicite, sauf mention du contraire que nous considérons uniquement des espaces hilbertiens de fonctions à noyaux reproduisants : H `de n.r.` K.

Théorème 3 [Théorème de représentation des fonctionnelles linéaires continues] *Soit $\ell \in H'$. La fonction $h : X \to \mathbb{C}; y \mapsto h(y) = \overline{\ell(K_y)}$ est le représentant de ℓ dans H, c'est-à-dire*

$$\forall\psi \in H, \qquad \ell(\psi) \quad = \quad \langle\psi\, ,\, h\rangle,$$

et on a

$$\|\ell\|^2_{H'} \quad = \quad \ell(\overline{\ell(K_x}))$$

PREUVE : D'après le théorème de Riesz, il existe $h \in H$ tel que

$$\forall \psi \in H, \qquad \ell(\psi) \;=\; \langle \psi\,,\, h\rangle.$$

Donc, en particulier, pour tout $x \in X$,

$$\ell(K_x) \;=\; \langle K_x\,,\, h\rangle \;=\; \overline{\langle h\,,\, K_x\rangle} \;=\; \overline{h(x)},$$

d'où $h(x) = \overline{\ell(K_x)}$.

De plus,

$$\|\ell\|^2_{H'} \;=\; \|h\|^2_H \;=\; \langle h\,,\, h\rangle \;=\; \ell(h) \;=\; \ell(\overline{\ell(K_x)}). \;\blacksquare$$

EXEMPLE : On rappelle que $H^1(\mathbb{R}) = \{\psi \,|\, \psi \text{ et } \psi' \in L^2(\mathbb{R})\}$. Nous verrons ultérieurement que $H^1(\mathbb{R})$ est un espace hilbertien à noyau reproduisant K défini par

$$\forall (x,\alpha) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \qquad K(x,\alpha) \;=\; \frac{1}{2}e^{-|x-\alpha|}.$$

Considérons la fonctionnelle $\ell_A : H^1(R) \to \mathbb{C}; \psi \mapsto \ell_A(\psi) = \int_{-A}^{+A}\psi(x)\,dx$, où A est un nombre réel positif donné. Soit h_A son représentant dans $H^1(\mathbb{R})$. Alors, par définition $h_A(x) = \overline{\int_{-A}^{+A} g(x,\alpha)\,d\alpha}$, c'est-à-dire

$$h_A(x) \;=\; \begin{cases} e^x \sinh(A) & \text{si } x \le -A, \\ 1 - e^{-A}\cosh(x) & \text{si } -A \le x \le +A, \\ e^{-x}\sinh(A) & \text{si } x \ge A. \end{cases}$$

D'autre part

$$\|\ell_A\|^2 \;=\; \int_{-A}^{+A} h_A(x)\,dx \;=\; 2(A - e^{-A}\sinh(A)).$$

REMARQUE : Soit A un opérateur de H dans H, linéaire et continu, on a

$$(A\psi)(x) \;=\; \langle A\psi\,,\, K_x\rangle \;=\; \langle \psi\,,\, A^*K_x\rangle,$$

où A^* est l'opérateur adjoint de A. Autrement dit A^*K_x est le représentant de la fonctionnelle $\delta_x \circ A$.

Théorème 4 [THÉORÈME DE LA PROJECTION] *Soit $H \subset \mathbb{C}^X$ un espace hilbertien. Soit $\widetilde{H}$ un sous-espace vectoriel fermé de H muni de la structure hilbertienne induite. Si $\widetilde{H}$ admet un noyau reproduisant $\widetilde{K}$, alors, l'application*

$$\psi \mapsto \widetilde{\psi} : y \mapsto \widetilde{\psi}(y) \;=\; \langle \psi(.)\,,\, \widetilde{K}_y\rangle$$

définit une application linéaire de H dans $\widetilde{H}$. En fait $\widetilde{\psi}$ est la projection orthogonale de ψ sur $\widetilde{H}$.

De plus, si H admet lui-même un noyau reproduisant K, $\widetilde{K}$ est la projection orthogonale de K sur $\widetilde{H}$.

PREUVE : Soit $\psi \in H$. Notons $\widetilde{\psi}$ la projection orthogonale de ψ sur $\widetilde{H}$. Alors $\psi - \widetilde{\psi}$ appartient à $\widetilde{H}^{\perp}$, l'orthogonal de $\widetilde{H}$ dans H. Comme, pour tout $QyinX$, $\widetilde{K}_y$ appartient à $\widetilde{H}$,

$$\langle \psi - \widetilde{\psi} \, , \, \widetilde{K}_y \rangle \quad = \quad 0.$$

Il en résulte que $\widetilde{\psi}(y) = \langle \widetilde{\psi} \, , \, \widetilde{K}_y \rangle = \langle \psi \, , \, \widetilde{K}_y \rangle$.

Si, de plus, H admet un noyau reproduisant K, alors, d'après la définition de K,

$$\widetilde{K}(y, c) \quad = \quad \langle \widetilde{K}_x \, , \, K_y \rangle.$$

D'où

$$\widetilde{K_y}(x) \; = \; \langle K_y \, , \, \widetilde{K}_x \rangle \quad = \quad \overline{\widetilde{K}(y,x)} \; = \; \widetilde{K}(x,y),$$

et donc en notant $\mathrm{proj}_{\widetilde{H}}$ la projection de H sur $\widetilde{H}$,

$$\mathrm{proj}_{\widetilde{H}}(K_y) \quad = \quad \widetilde{K}_y. \; \blacksquare$$

Corollaire 3 *Soit H un espace hilbertien à noyau reproduisant K. Pour toute décomposition orthogonale $H = H_1 \oplus H_2$ (i.e. $H_1^{\perp} = H_2$), pour tout $i \in \{1, 2\}$, H_i est un espace hilbertien à noyau reproduisant K_i tels que $K = K_1 + K_2$.*

Proposition 11 [PROPRIÉTÉ DE CONVERGENCE D'UNE SÉRIE DE FOURIER] *Soit $H \subset \mathbb{C}^X$ un espace hilbertien à noyau reproduisant K et séparable (c'est-à-dire qu'il existe une base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$). Alors, pour tout $\psi \in H$, la série de Fourier associée à ψ relative à une base hilbertienne converge ponctuellement vers la fonction ψ sur X. De plus cette convergence s'avère uniforme sur toute partie Y de X telle que la famille $(K(y, y))_{y \in Y}$ est bornée.*

PREUVE : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $F_n(\psi) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle \psi \, , \, e_i \rangle e_i$. Il est alors immédiat que $\lim_{n \to +\infty} \|\psi - F_n(\psi)\| = 0$. Comme, pour tout $x \in X$,

$$|(\psi - F_n(\psi))(x)| \quad = \quad |\langle \psi - F_n(\psi) \, , \, K_x \rangle \; \leq \; \|\psi - F_n(\psi)\| \sqrt{K(x,x)},$$

il s'ensuit que la convergence de la série de Fourier est ponctuelle et qu'elle est uniforme sur toute partie Y de X telle que la famille $(K(y, y))_{y \in Y}$ est bornée. $\blacksquare$

REMARQUE : Si $H \subset \mathbb{C}^X$ est un espace hilbertien à noyau reproduisant K séparable, alors, pour toute base hilbertienne $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on a

$$\forall (x, y) \in X \times X, \qquad K(x, y) \quad = \quad \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \langle K_y \, , \, e_i \rangle e_i(x),$$

ou autrement dit $K(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle K_y \, , \, e_i \rangle e_i(x)$.

2.3.1 Approximation de type spline

Soit H un espace hilbertien. Soit $\mathcal{I}$ un ensemble et, pour tout $i \in \mathcal{I}$, $f_i \in \mathbb{C}$ et $k_i \in H$. On pose

$$\begin{aligned} V_0 &= \{\psi \in H \,|\, \forall i \in \mathcal{I}, \quad \langle \psi \,,\, k_i \rangle = 0\} \qquad \text{et} \\ V_f &= \{\psi \in H \,|\, \forall i \in \mathcal{I}, \quad \langle \psi \,,\, k_i \rangle = f_i\}. \end{aligned}$$

On a alors le résultat suivant

Théorème 5 *Si $V_f \neq \emptyset$, alors*

i) Il existe un unique $u \in H$ tel que $\|u\| = \min_{\psi \in V_f} \|\psi\|$,

ii) l'unique élément u du i) appartient à $V_f \cap V_0^perp$.

PREUVE : V_f est un espace affine de direction V_0 qui est lui-même un sous-espace vectoriel fermé de H d'où le résultat. ■

CAS PARTICULIER Si $H \subset \mathbb{C}^X$ est un espace hilbertien à noyau reproduisant K et si, pour tout $i \in \mathcal{I}$, il existe x_i tel que $k_i = K_{x_i}$, alors, en posant $X_0 = \{x_i \,|\, i \in \mathcal{I}\}$, on a

$$V_f = \{\psi \in H \,|\, \psi|_{X_0} = f\} \quad f \in \mathbb{C}^{X_0}.$$

Le théorème précédent est alors le théorème de caractérisation de l'interpolant quand il existe de norme minimale de f par une fonction de H. De façon particulière, si la fonction f est définie sur tout X et de plus $f \in H$, on a alors

$$u \in V_0^{\perp}, \qquad f - u \in V_0 \quad \text{et donc} \quad u = \mathrm{proj}_{V_0^{\perp}}(f).$$

REMARQUE : Si de plus $\mathcal{I}$ est un ensemble fini, on peut toujours poser $\mathcal{I} = \{1, 2, \ldots, n\}$ et alors u, s'il existe, est déterminé sans ambiguïté en écrivant $u = \sum_{i=1}^{n} A_j k_j$ où les A_j sont solutions du système

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \langle k_j \,,\, k_i \rangle = f_i, \qquad i \in \{1, \ldots, n\}.$$

INÉGALITÉ DE L'HYPERCERCLE Si $H \subset \mathbb{C}^X$ est un espace hilbertien à noyau reproduisant K et si nous reprenons les notations générales du théorème précédent. Alors pour tout $\ell \in H'$ ou ce qui est équivalent son représentant h dans H, u est en quelque sorte une approximation des éléments ψ de V_f. On peut donc également considérer l'approximation $\ell(\psi) \simeq \ell(u)$ pour tout $\psi \in V_f$.

Quelle est l'erreur commise dans cette approximation ?

On a $\psi - u \in V_0$ pour tout $\psi \in V_f$ et donc

$$\ell(\psi - u) = \ell(\psi) - \ell(u) = \langle h \,,\, \psi - u \rangle = \langle h_0 \,,\, \psi - u \rangle$$

où $h_0 = \mathrm{proj}_{V_0^\perp}(h)$.

On peut alors écrire si $\psi \in C_{f,r} = \{\psi \in V_f \mid \|\psi\| \leq r\}$,

$$|\ell(\psi) - \ell(u)| \quad \leq \quad \|h_0\|\,\|\psi - u\| \;\leq\; \|h_0\|(r^2 - \|u\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\|h_0\| = \sqrt{\ell(h_0)}$, il vient l'encadrement

$$\ell(u) - K \;\leq\; \ell(\psi) \;\leq\; \ell(u) - K \qquad \text{pour tout } \psi \in C_{f,r},$$

où $K = \sqrt{\ell(h_0)(r^2 - \|u\|^2)}$. Cette inégalité est connue sous le nom de l'inégalité de l'hypercercle.

L'utilisation de cette inégalité passe par la détermination de $u = \mathrm{proj}_{V_0^\perp}(\psi)$ *et* $h_0 = \mathrm{proj}_{V_0^\perp}(h)$, *$\psi$ étant donnée et h étant supposée connue. On peut trouver u et h_0 à l'aide du théorème de la projection si, toutefois, le noyau reproduisant de $V_0^\perp$ est assez explicite.*

Remarque : Nous avons parlé d'approximation de type spline car les résultats précédents sont des résultats classiques dans la théorie générale des fonctions splines. Nous n'avons faits ici qu'expliciter ces résultats en termes de noyaux reproduisants.

2.3.2 Application

Soit $\mathcal{P}_{n,\mu}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n muni du produit scalaire $\langle P\,,\,Q\rangle = \int_a^b \mu(x)P(x)Q(x)\,dx$ où μ est un poids adéquat. On pose

$$V \quad = \quad \{P \in \mathcal{P}_{n,\mu} \mid P^{(n)}(0) = n!\}$$

c'est-à-dire l'ensemble des polynômes de degré n dont le coefficient d'ordre n est égal à 1. Alors $V = x^n + V_0$ où V_0 est l'ensemble des polynômes de degré strictement inférieur à n. Dans ces conditions, le polynôme de degré n, de coefficient d'ordre n égal à 1 et de norme minimale est l'unique élément de $V \cap V_0^\perp$. Or $V_0^\perp$ est un espace vectoriel de dimension 1. Alors $V_0^\perp$ est l'espace vectoriel engendré par p_n le $(n+1)^{\text{ème}}$ polynôme orthogonal par rapport au poids μ. Il s'ensuit que $V \cap V_0^\perp = \left\{\dfrac{p_n}{a_n}\right\}$ où a_n est le coefficient d'ordre n du polynôme p_n. Ainsi $\dfrac{p_n}{a_n}$ est parmi les polynômes de degré égal à n de coefficient d'ordre n égal à 1, celui qui a la norme la plus petite (c'est-à-dire celui qui approche le mieux en norme la fonction nulle). Ce résultat est classique dans la théorie des polynômes orthogonaux.

2.4 Une autre caractérisation de H associé au noyau K

On envisage ici, pour simplifier, le cas réel.

Soit $f \in \mathbb{R}^X$. On notera $u_{f;x_1,\ldots,x_n}$ l'unique fonction de H qui interpole f en les points $(x_i)_{i\in\{1,\ldots,n\}}$, et de norme minimale.

Théorème 6 *Soit $f \in \mathbb{R}^X$. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

i) $f \in H$,

ii) Il existe une constante positive M_f, ne dépendant que de f telle que

$$\forall n \geq 1, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n, \quad \|u_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \quad \leq \quad M_f,$$

iii) $\forall n \geq 1, \quad \forall (A_1, \ldots, A_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (x_1, \ldots, x_n) \in X^n,$

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i f(A_i)| \quad \leq \quad M_f.\|\sum_{i=1}^{n} A_i K_{x_i}\|_H.$$

De plus, si $f \in H$, on a

$$\|f\|_H \quad = \quad \sup\{\|u_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \,|\, n \in \mathbb{N}^* \text{ et } (x_1, \ldots, x_n) \in X^n\}.$$

PREUVE : i) $\Longrightarrow$ ii). D'après les résultats de la section précédente, $u_{f;x_1,\ldots,x_n}$ s'interprète comme la projection orthogonale de f sur $V_0^\perp$ où V_0 est l'orthogonal des $(K_{x_i})_{i\in\{1,\ldots,p}$. On a donc toujours

$$\|u_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H \quad \leq \quad \|f\|_H,$$

et ainsi on peut prendre $M_f = \|f\|_H$.
ii) $\Longrightarrow$ iii). Par définition, puisque $\psi = u_{f;x_1,\ldots,x_n}$, on a $\psi(x_i) = f(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. D'où

$$\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i) \quad = \quad \sum_{i=1}^{p} A_i \psi(x_i) \;=\; \langle \psi \,, \sum_{i=1}^{p} A_i K_{x_i}\rangle_H,$$

et, en vertu de l'inégalité de Schwarz

$$|\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)| \quad \leq \quad \|\psi\|\_H\|\sum_{i=1}^{p} A_i K_{x_i}\|_H \;\leq\; M_f.\|\sum_{i=1}^{p} A_i K_{x_i}\|_H.$$

iii) $\Longrightarrow$ i). Considérons sur H_0, muni de sa structure préhilbertienne, l'application

$$\begin{aligned} L_f : H_0 \quad &\rightarrow \quad \mathbb{R}; \\ h = \sum_{i=1}^{n} A_i K_{x_i} \quad &\mapsto \quad L_f(h) = \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i). \end{aligned}$$

Cette application est linéaire bornée car $|L_f(h)| \leq M_f\|h\|_{H_0}$. Elle peut donc être prolongé en une application linéaire continue $\widetilde{L}_f$ sur $H = \widetilde{H_0}$, et donc, il existe $z_f \in H$ telle que $\widetilde{L}_f(h) = \langle h\,,\, z_f\rangle_H$ pour tout $h \in H$. En particulier, pour $h = K_x$ où $x \in X$, on a

$$\widetilde{L}_f(K_x) \;=\; \langle K_x\,,\, z_f\rangle_H \;=\; L_f(K_x) \;=\; f(x).$$

Il en résulte que $f = z_f$ et donc que f appartient bien à H.
<u>Norme de f dans H.</u> Puisque $f = z_f$ et que $H = \widetilde{H_0}$, on a

$$\|f\|_H \;=\; \|z_f\|_H \;=\; \sup\left\{ \frac{|L_f(h)|}{\|h\|_{H_0}} \;\middle|\; h \in H_0 \text{ et } h \neq 0 \right\}.$$

Or comme nous l'avons vu dans la démonstration de ii) $\Longrightarrow$ iii),

$$\begin{aligned} \|f\|_H^2 &= \sup\left\{ \frac{|\sum_{i=1}^n A_i f(x_i)|^2}{\|\sum_{i=1}^p A_i K_{x_i}\|_{H_0}^2} \;\middle|\; n \geq 1 \text{ et } \begin{array}{l} (A_1,\ldots,A_n) \in \mathbb{R}^n \\ (x_1,\ldots,x_n) \in X^n \\ \text{tel que } \sum A_i K_{x_i} \neq 0 \end{array} \right\} \\ &= \sup\left\{ \|u_{f;x_1,\ldots,x_n}\|_H^2 \,|\, n \geq 1 \text{ et } (x_1,\ldots,x_n) \in X^n \right\}. \end{aligned}$$

■

Chapter 3

Exemples

3.1 Les espaces de dimension finie

Soit E un espace vectoriel de $\mathbb{C}^X$ de dimension finie n et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de E. La structure hilbertienne la plus générale sur E est obtenue en se donnant une matrice hermitienne définie positive $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ qui sera la matrice de Gram associée au couple (f, f), c'est-à-dire $m_{i,j} = \langle f_j \, , \, f_i \rangle$. En effet, quelque soit $h \in E$, il existe une unique matrice colonne $A \in \mathbb{C}^{n \times 1}$ telle que $h = fA$. Il s'ensuit que, pour tout couple $(h_1, h_2) \in E \times E$, $\langle h_1 \, , \, h_2 \rangle = A_2^* M A_1$ où $h_i = fA_i$ pour tout $i \in \{1, 2\}$.

Si E admet un noyau reproduisant K, alors, pour tout $x \in X$, il existe $B_x \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, telle que $K_x = fB_x$ et, pour tout $h \in E$, $\langle h \, , \, K_x \rangle = h(x)$. Si on pose $h = fA$ avec $A \in\in \mathbb{C}^{n \times 1}$,

$$f(x)A \quad = \quad h(x) \; = \; \langle h \, , \, K_x \rangle \; = \; B_x^* M A.$$

Comme cette égalité est vraie pour tout $A \in \mathbb{C}^{n \times 1}$, on a $f(x) = B_x^* M$ ou autrement dit $B_x = M^{-*} f(x)^*$ et donc $K(y, x) = f(y) M^{-1} f(x)^*$. Il en résulte que

i) $\overline{K(x, y)} = K(x, y)^* = f(x))M^{-1} f(y)^* = K(y, x)$, et

ii)

Remarque : Si $(f_1, \ldots, f_n)$ est une base orthonormée, c'est-à-dire que M est la matrice unité, alors le noyau vérifie

$$\forall (x, y) \in X \times X, \qquad K(x, y) \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \overline{f_i(y)}.$$

Exemples :

1. Considérons $L^2(-\pi,+\pi)$ l'espace des classes de fonctions définies sur l'intervalle $]-\pi,+\pi[$ et à valeurs complexes qui est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle \varphi\,,\,\psi\rangle \quad = \quad \int_{-\pi}^{+\pi} \varphi(x)\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Mais $L^2(-\pi,+\pi)$ n'admet pas de noyau reproduisant, pour la simple raison qu'une fonction de cet espace n'est pas définie en tout point de $[-\pi,+\pi]$. Par contre, il existe des sous-espaces hilbertiens de $L^2(-\pi,+\pi)$ (avec la norme induite) qui admettent un noyau reproduisant, en particulier les espaces de dimension finie.

Ainsi $T_n(-\pi,+\pi)$, l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n, à coefficients complexes, est un sous-espace hilbertien de $L^2(-\pi,+\pi)$ de dimension $2n+1$. La famille

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx} \;\middle|\; k\in\{-n,\ldots,-1,0,1,\ldots,n\}\right\}$$

est une base orthonormée. Il s'ensuit que le noyau reproduisant de l'espace $T_n(-\pi,+\pi)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} g(x,y) &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-iky} = \sum_{k=-n}^{n}\frac{1}{2\pi}e^{ik(x-y)} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)(x-y)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Remarque : Si nous appliquons le théorème à cet exemple, pour tout $f\in L^2(-\pi,+\pi)$, sa projection orthogonale $\widetilde{f_n}$ sur $T_n(-\pi,+\pi)$ est donc

$$\widetilde{f_n}(x) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(x)\frac{\sin\left(\dfrac{(2n+1)(x-y)}{2}\right)}{\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)}\,dy,$$

ce qui n'est autre que l'expression sous forme intégrale de la tronquée de Fourier de f au rang n.

2. On considère cette fois, l'espace de Hilbert réel des classes de fonctions définies sur $]a,b[\subset\mathbb{R}$ à valeurs réelles, $L^2_\mu(a,b)$ où μ est une fonction poids positive, et telle que

$$\langle \varphi\,,\,\psi\rangle \quad = \quad \int_a^b \mu(x)\varphi(x)\psi(x)\,dx$$

définisse un produit scalaire. Là encore, pour les mêmes raisons, l'espace considéré n'admet pas de noyau reproduisant. Soit $H = \mathcal{P}_{n,\mu}$ le sous-espace vectoriel de $L^2_\mu(a,b)$ constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Si $(p_i)_{i\in\{0,\dots,n}$ désignent les $n+1$ premiers polynômes orthogonaux par rapport au poids μ et de norme 1. Alors nous avons une base de H et le noyau de H a pour expression

$$K_\mu = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)p_i(y),$$

et la projection orthogoanle $\widetilde{f_n}$ de $f \in L^2_\mu(a,b)$ sur H a pour expression

$$\widetilde{f_n}(x) = \int_a^b \mu(y)f(y)g(x,y)\,dy = \sum_{i=0}^{n}\left(\int_a^b \mu(y)f(y)p_i(y)\,dy\right)p_i(x).$$

Le coefficient de $p_i(x)$ dans la formule précédente n'est autre que le scalaire $\langle f\,,\,p_i\rangle$ et on retrouve le résultat

$$\widetilde{f_n} = \sum_{i=0}^{n}(\langle f\,,\,p_i\rangle)p_i$$

Remarque : Le calcul de K_μ peut être facilité par le théorème suivant :

Théorème 7 [Théorème de Christoffel–Darboux] *Si, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $p_i(x) = k_i x^i + q_i$ où q_i est un polynôme de degré inférieur strictement à i, alors*

$$\begin{aligned} g_\mu(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} p_i(x)p_i(y) \\ &= \frac{k_n}{k_{n+1}} \times \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{x-y}. \end{aligned}$$

Application : Soit $x_0 \in [a,b]$. Alors le problème

$$\alpha = \max\{|P(x_0)|\,|P \in H \text{ et } \|P\|_\mu = 1\}$$

se résoud facilement à l'aide du formalisme utilisé jusqu'ici. En effet, on a

$$P(x_0) = \delta_{x_0}(P) = \langle P\,,\,K_\mu(.,x_0)\rangle,$$

et α s'interprète comme la norme de l'application linéaire $P \mapsto \delta_{x_0}(P)$. On a donc

$$\alpha = \|K_\mu(.,x_0)\|_\mu = \sqrt{K_\mu(x_0,x_0)}$$

et le max est atteint (inégalité de Schwarz) pour $\widehat{P} = \dfrac{K_\mu(.,x_0)}{\sqrt{K_\mu(x_0,x_0)}}$.

3.2 L'espace $H_{(0,\beta)}$ où $\beta > 0$

On considère $X =]0,\beta[$. La fonction $K(x,y) = \min(x,y)$ vérifie sur X les condition du théorème de caractérisation du chapitre 2. Par définition, on notera $\widetilde{H}_{(0,\beta)}$ l'espace hilbertien associé à ce noyau reproduisant. Pour caractériser $\widetilde{H}_{(0,\beta)}$, utilisons le théorème