Chapitre 1

Etude sur un exemple de la bijection entre Hilb(E) et Ł$^+(E)$

Xavier Bay-Sylvie Champier

Dans tout ce chapitre, on considère l'ensemble E défini par $E = \{f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, continue\}$.

1.1 Rappels

1.1.1 Dual des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$

$(E, || \,.\, ||_\infty)$ est un espace de Banach.
Son dual topologique est $E' = \{\mu$,mesure signée bornée$\}$ et $< f, \mu >_{E,E'} = \mu(f) = \int_0^1 f(t)d\mu(t)$.
On note $|| \mu || = \sup\limits_{||f||_\infty \leq 1} |< f, \mu >|$ la variation totale de la mesure μ.

1.1.2 Sous espace hilbertien

On rappelle que $\mathcal{H}$ est un sous espace hilbertien de E si et seulement si $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert contenu dans E et s'il existe $k_\mathcal{H} \geqslant 0$ tel que $\|h\|_\infty \leqslant k_\mathcal{H}\|h\|_\mathcal{H}$.
On note Hilb(E) l'ensemble des sous espaces hilbertiens de E.
On rappelle que H est un noyau symétrique positif sur E ssi H est un opérateur linéaire symétrique positif de E' dans E i.e.
$< H(\mu), \nu >_{E,E'} = < H(\nu), \mu >_{E,E'}$ et
$< H(\mu), \mu >_{E,E'} \geqslant 0$.

1.1.3 Distributions

Soit Ω un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$. Ici $\Omega = [0,1]$.
On dit que f est localement intégrable sur Ω si f est Lebesgue mesurable et si pour tout compact $K \in \Omega$, on $\int_K | f(x) | \, dx < \infty$. L'idée des distributions est d'interpréter f comme un objet qui fait correspondre le nombre $\int f\phi$ à toute fonction test ϕ convenablement choisie, au lieu d'être une application qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f(x)$.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, on appelle support de f l'adhérence de $\{x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\}$.
On considère $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $\phi \in C^\infty(\Omega)$ dont le support est contenu dans un sous ensemble compact de Ω. On munit cet ensemble des normes suivantes $|| \phi ||_N = \mathrm{Max}\{| \phi^{(k)}(x) | ; x \in \Omega, k \leq N\}$, pour $N \in \mathbb{N}$, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Si K est un compact de $I\!R$, on note $\mathcal{D}_K$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(\mathbb{R})$ de support contenu dans K.
Une forme linéaire sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est une distribution si et seulement si pour tout compact $K \in \Omega$, il existe $N \in \mathbb{N}$, il existe $C < \infty$ tels que $\forall \phi \in \mathcal{D}_K, \mid \Lambda\phi \mid \leq C \mid\mid \phi \mid\mid_N$.
On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'ensemble des distributions dans Ω.
On peut voir une fonction comme une distribution. En effet, soit f une fonction localement intégrable sur Ω, on définit $\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx$ pour $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$.
Comme $\mid \Lambda_f(\phi) \mid \leq (\int_K \mid f \mid) \mid\mid \phi \mid\mid_0$, on a $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$. On identifie souvent la distribution Λ_f avec la fonction f.

1.1.4 Dérivée d'une distribution

Soit $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la formule $D\Lambda(\phi) = -\Lambda(\phi')$ pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ définit une forme linéaire $D\Lambda$ sur $\mathcal{D}(\Omega)$ qui est une distribution.
preuve : si $\mid \Lambda\phi \mid \leq C \mid\mid \phi \mid\mid_N$ pour tout $\phi \in \_K$ alors
$\mid (D\Lambda(\phi) \mid \leq C \mid\mid \phi' \mid\mid_N \leq C \mid\mid \phi \mid\mid_{N+1}$ d'où $D\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$.

1.1.5 Dérivabilité au sens des distributions

La dérivée au sens des distributions d'une fonction f localement intégrable dans Ω est par définition la distribution $D\Lambda_f$.

Théorème 1 *Soit $f \in L^2([0,1])$ telle que sa dérivée au sens des distributions soit dans $L^2([0,1])$ alors il existe une fonction $g \in C([0,1])$ telle que :*
a) f soit égale presque partout à g.
b) pour tout $(x,y) \in [0,1]^2$, $g(x) - g(y) = \int_x^y f'(t)dt$.

Remarque : On utilisera ce théorème pour définir H_0^1 comme sous ensemble de E et non de L^2.

1.2 Construction d'une application ψ de Hilb(E) dans Ł$^+(E)$

1.2.1

Soit $\mathcal{H}$ ∈Hilb(E) fixé. Montrons que si $\mu \in E'$, alors $\mu_{|\mathcal{H}} \in \mathcal{H}'$.
De manière évidente, $\mu_{|\mathcal{H}}$ est linéaire. Il suffit de vérifier qu'elle est continue pour la norme de $\mathcal{H}$.
$|\mu_{|\mathcal{H}}(h)| = |\mu(h)| = |< h, \mu >_{E,E'}| \leqslant \|h\|_\infty \|\mu\| \leqslant k_\mathcal{H} \|h\|_\mathcal{H} \|\mu\|$ d'où la continuité de $\mu_{|\mathcal{H}}$.

On applique le théorème de Riesz, il existe $T(\mu) \in \mathcal{H}$ tel que pour tout $h \in \mathcal{H}$, $\mu_{|\mathcal{H}}(h) = < h, T(\mu) >_\mathcal{H}$.
On a donc construit une application de E' dans E qui est bien évidemment linéaire.

$$\begin{array}{rccc} T: & E' & \to & \mathcal{H} \subset E \\ & \mu & \mapsto & T(\mu) \end{array}$$

1.2.2 Propriétés de T

Montrons que T est symétrique et positif.
On a $\mu_{|\mathcal{H}}(h) = < h, \mu >_{E,E'} = < h, T(\mu) >_\mathcal{H}$.
Comme $< .,. >_\mathcal{H}$ est symétrique, on obtient
$< T(\mu), \nu >_{E,E'} = < T(\mu), T(\nu) >_\mathcal{H} = < T(\nu), T(\mu) >_\mathcal{H} = < T(\nu), \mu >_{E,E'}$ donc T est symétrique.
De plus $< T(\mu), \mu >_{E,E'} = < T(\mu), T(\mu) >_\mathcal{H} \geq 0$ donc T est positif.
Montrons que T est faiblement continue :
Soit μ_i une suite généralisée qui est faiblement convergente vers la mesure nulle.
Montrons que $< T(\mu_i), \nu >_{E,E'} \longrightarrow 0$ pour tout $\nu \in E'$.

Or $< T(\mu_i), \nu >_{E,E'} = < T(\nu), \mu_i >_{E,E'} \longrightarrow 0$ car μ_i une suite généralisée qui est faiblement convergente vers la mesure nulle.
On définit alors l'application ψ par

$$\begin{array}{lll} \psi : & \mathrm{Hilb}(E) & \longrightarrow \mathrm{L}^+(E) \\ & \mathcal{H} & \mapsto T_{\mathcal{H}} \end{array}$$

$$\text{avec} \quad \mathrm{T}_{\mathcal{H}} : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & \mathcal{H} \\ \mu & \mapsto & T(\mu) \end{array} \quad \text{tel que} \quad \mu(\mathrm{h}) = < \mathrm{h}, \mathrm{T}(\mu) >_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout} \quad \mathrm{h} \in \mathcal{H}$$

1.2.3 Etude d'un cas particulier

On prend pour $\mathcal{H}$ l'espace $H_0^1 = \{f \in E, \exists g \in L^2([0,1]), \forall \phi \in C_C^1([0,1]), \int_0^1 f\phi' = -\int g\phi\}$. On peut aussi voir H_0^1 comme l'ensemble des fonctions de E nulles en 0 et 1 dont la dérivée au sens des distributions est dans L^2. On a donc $H_0^1 = \{f \in E, \exists g \in L^2([0,1]), f(x) = \int_0^x g(t)dt\}$.
H_0^1 est muni du produit scalaire
$< f, h >_{H_0^1} = \int_0^1 f'(u)h'(u)du$ où les dérivées sont des dérivées au sens des distributions.
Montrons que l'injection de H_0^1 dans E est continue.
Soit $f \in H_0^1$, $|f(x)| = |\int_0^x g(t)dt| \leqslant \sqrt{x}\|g\|_2 = \sqrt{x}\|f'\|_2 \leqslant \|f\|_{H_0^1}$ car $x \in [0,1]$ d'où $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{H_0^1}$.
L'injection est donc continue et H_0^1 est un sous espace de Hilbert de E.

Remarque : Si on se place sur $\mathbb{R}$ au lieu de $[0,1]$, on a $H_0^1(\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\| = \int (f'(x))^2dx$ qui s'injecte continuement dans $C(\mathbb{R})$ muni de la norme de la convergence uniforme sur les compacts.

Montrons que T est l'application

$$\begin{array}{lll} E' & \to & H_0^1 \\ \mu & \mapsto & (x \mapsto \int_0^x \mu([t,1])dt). \end{array}$$

Soient $h \in \mathcal{H}$ et $\mu \in E'$,

$$\begin{aligned} < h, \mu >_{E,E'} &= \int_0^1 h(t)d\mu(t) \\ &= \int_0^1 \int_0^t h'(s)dsd\mu(t) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(s)h'(s)dsd\mu(t) \\ &= \int_0^1 h'(s) \int_0^1 \mathbf{1}_{[0,t]}(s)d\mu(t)ds \text{ (Fubini)} \\ &= \int_0^1 h'(s) \int_0^1 \mathbf{1}_{[s,t]}(t)d\mu(t)ds \\ &= \int_0^1 h'(s)\mu([s,1])ds \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} < h, \mu >_{E,E'} &= < h, T(\mu) >_{H_0^1} \\ &= \int_0^1 h'(s)(T(\mu))'(s)ds \\ &= < h, T(\mu) >_{H_0^1} . \end{aligned}$$

Si on note T_μ l'application qui à $x \in [0,1]$ associe $\int_0^x \mu([t,1])dt$,
alors on a pour tout $h \in \mathcal{H}$,
$< h, T(\mu) >_{H_0^1} = < h, T_\mu >_{H_0^1}$ i.e. $< h, T(\mu) - T_\mu >_{H_0^1} = 0$.
En prenant $h = T(\mu) - T_\mu$ et en utilisant les propriété du produit scalaire dans H_0^1, on obtient $T(\mu) - T_\mu = 0$ i.e. $T(\mu) = T_\mu$ d'où pour tout $x \in [0,1]$, $T(\mu)(x) = \int_0^x \mu([u,1])du$.

Remarque : $T(\mu)$ est l'anti-fonction de répartition,
la fonction de répartition étant $\mu \mapsto (x \mapsto \int_0^x d\mu(t))$.

1.3 Etude de l'injectivité de l'application ψ de Hilb(E) dans Ł$^+(E)$

1.3.1 Injectivité

Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ deux espaces hilbertiens tels que $T_{\mathcal{H}} = T_{\mathcal{K}}$.

$$\begin{aligned} < T_{\mathcal{H}}(\mu), \nu >_{E,E'} &=< T_{\mathcal{H}}(\mu), T_{\mathcal{H}}(\nu) >_{\mathcal{H}} \\ &=< T_{\mathcal{K}}(\mu), T_{\mathcal{K}}(\nu) >_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} < T_{\mathcal{H}}(\mu), \nu >_{E,E'} &=< T_{\mathcal{K}}(\mu), \nu >_{E,E'} \\ &=< T_{\mathcal{K}}(\mu), T_{\mathcal{K}}(\nu) >_{\mathcal{K}} \end{aligned}$$

d'où $< T_{\mathcal{H}}(\mu), T_{\mathcal{H}}(\nu) >_{\mathcal{H}}=< T_{\mathcal{K}}(\mu), T_{\mathcal{K}}(\nu) >_{\mathcal{K}}$.
Conséquence :
Sur $T_{\mathcal{H}}(E') = T_{\mathcal{K}}(E')$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ induisent la même structure hilbertienne.

Montrons que $T_{\mathcal{H}}(E') = T_{\mathcal{K}}(E')$ est dense dans $\mathcal{H}$ pour le produit scalaire $< .,. >_{\mathcal{H}}$ (et donc aussi dans $\mathcal{K}$ pour le produit scalaire $< .,. >_{\mathcal{K}}$ puisqu'il est égal à $< .,. >_{\mathcal{H}}$).
Soit $h \in T_{\mathcal{H}}(e')^{\perp}$ et $\mu \in E'$,

$$< h, \mu >_{E,E'}=< \underbrace{h}_{\in T_{\mathcal{H}}(E')^{\perp}}, \underbrace{T_{\mathcal{H}}(\mu)}_{\in T_{\mathcal{H}}(E')} >_{\mathcal{H}}= 0$$

Ceci est vrai pour tout μ donc $h = 0$ d'après le théorème d'Hahn banach (sinon, si $h \neq 0$, $\exists \mu \in E'$ tel que $< h, \mu >_{E,E'}= 1$).
On applique le corrollaire 5 d'où
$\overline{T_{\mathcal{H}}(E')} = \mathcal{H}$ et $\overline{T_{\mathcal{K}}(E')} = \mathcal{K}$.
Montrons que $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$.
Soit $h \in \mathcal{H}$, il existe une suite $(h_n)_n$ de $T_{\mathcal{H}}(E')$ telle que $\lim\limits_{\mathcal{H}} h_n = h$.
$(h_n)_n$ est une suite de $T_{\mathcal{H}}(E')$ convergente dans $\mathcal{H}$ donc de Cauchy dans $T_{\mathcal{H}}(E')$. Or, sur $T_{\mathcal{H}}(E')$ et sur $T_{\mathcal{K}}(E')$, on a la même structure hilbertienne et $T_{\mathcal{H}}(E') = T_{\mathcal{K}}(E')$ donc $(h_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $T_{\mathcal{K}}(E')$ donc convergente dans $\mathcal{K}$ vers k.
Il faut montrer que $h = k$.
Soit $\mu \in E'$,

$$\begin{aligned} < h - k, \mu >_{E,E'} &=< h, \mu >_{E,E'} - < k, \mu >_{E,E'} \\ &=< T_{\mathcal{H}}(\mu), h >_{\mathcal{H}} - < T_{\mathcal{K}}(\mu), k >_{\mathcal{K}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} (< T_{\mathcal{H}}(\mu), T_{\mathcal{H}}(\mu_n) >_{\mathcal{H}} - < T_{\mathcal{K}}(\mu), T_{\mathcal{K}}(\mu_n) >_{\mathcal{K}}) \quad \text{par continuité des produits scalaires} \\ &= \lim_{n\to+\infty} (< T_{\mathcal{H}}(\mu), \mu_n) >_{E,E'} - < T_{\mathcal{K}}(\mu), \mu_n) >_{E,E'}) \\ &=< 0, \mu_n >_{E,E'}= 0 \end{aligned}$$

D'après le théorème d'Hahn-Banach, comme ceci est vrai pour tout $\mu \in E'$, on obtient $h - k = 0$ i.e. $h = k$ donc $\mathcal{H} \subset \mathcal{K}$.
Par symétrie, $\mathcal{H} = \mathcal{K}$.
L'application ψ de Hilb(E) dans Ł$^+(E)$ est donc injective.

1.3.2 Retour à l'exemple

Montrons directement que $\overline{T_{\mathcal{H}}(E')} = H_0^1$.

a) On montre d'abord que $\{f \in E, \exists g \quad \text{polynomiale}, \mathrm{f(x)} = \int_0^{\mathrm{x}} \mathrm{g(t)dx}\} \subset \mathrm{T}_{\mathcal{H}}(\mathrm{E'})$.
$T_{\mathcal{H}}(E') = \{f \in E, f(x) = \int_0^x \mu([t,1])dt, \mu \in E'\}$ d'après l'étude précédente.
Pour $\mu = \delta_1$,
$T_{\mathcal{H}}(\mu)(x) = \int_0^x \mu([t,1])dt = \int_0^x 1dt = x$ donc $T_{\mathcal{H}}(\mu) = Id$.
Avec une mesure μ_n telle que $d\mu_n(t) = n(1-t)^{n-1}dt$, on obtient :
$\mu_n([t,1]) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[t,1]}(x)d\mu_n(x) = \int_1^t n(1-x)^{n-1}dx = (1-t)^n$
et μ_n est une mesure positive bornée donc signée i.e. $\mu_n \in E'$.
Soit $f \in E$ pour laquelle il existe g fonction polynomiale telle que $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ pour tout $x \in [0,1]$.
On décompose g dans la base $1, 1-X, (1-X)^2, ...(1-X)^n, ...,$

$g=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n(1-X)^n$.

$f(x)=\sum_{n=0}^{N}\int_0^x\alpha_n(1-t)^n dt=\sum_{n=0}^{N}\alpha_n\int_0^x\mu_n[t,1]dt$.

donc $f\in T_{\mathcal{H}}(E')$ par linéarité de $T_{\mathcal{H}}$.

Ainsi $\{f\in E,\exists g \quad \text{polynomiale}, \mathrm{f(x)=\int_0^x g(t)dx\}\subset T_{\mathcal{H}}(E')}$.

b) Montrons que l'application $\Theta:\begin{array}{ccc}L^2 & \longrightarrow & H_0^1\\ g & \mapsto & f\end{array}$ où f est définie par $f(x)=\int_0^x g(t)dt$ est une isométrie.

Θ est bien définie car $\mid f(x)-f(y)\mid\leq\mid x-y\mid\mid\mid g\mid\mid_{L^2}$ donc f est continue.

Θ est de manière évidente linéaire.

Θ est injective car $\Theta(g)=0\Longrightarrow\forall x\in[0,1],\ \int_0^x g(t)dt=0\Longrightarrow g=0$ p.p. $\Longrightarrow g=0$ dans L^2.

Θ est surjective par définition de H_0^1.

Montrons que Θ conserve le produit scalaire :

Soit (g_1,g_2) dans L^2, on note $f_1=\Theta(g_1)$ et $F-2=\Theta(g_2)$.

On a au sens des distributions $f_1'=g_1$ et $f_2'=g_2$.

d'où $<\Theta(g_1),\Theta(g_2)>_{H_0^1}=<f_1,f_2>_{H_0^1}=\int_0^1 g_1g_2=<g_1,g_2>_{L^2}$.

Ainsi Θ est une isométrie de L^2 dans H_0^1.

Comme l'espace des polynômes est dense dans L^2, par isométrie, on obtient que $\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(E')$ est dense dans H_0^1 i.e. $\overline{\mathcal{T}_{\mathcal{H}}(E')}=H_0^1$.

Montrons que $T_{\mathcal{H}}(E')\neq H_0^1$.

Pour cela, on construit une fonction $f\in H_0^1$ qui ne soit pas dans $T_{\mathcal{H}}(E')$.

Soit $\mu\in E'$, on a $\mu([t,1])=<\mathbf{1}_{[t,1]},\mu>_{E,E'}$ et $\mid\mid\mathbf{1}_{[t,1]}\mid\mid_\infty=1$.

Ainsi, pour tout $t\in[0,1]$, $\mid\mu([t,1])\mid\leq\mid\mid\mu\mid\mid$. Comme μ est bornée , l'application $t\mapsto\mid\mu([t,1])\mid$ est bornée. Il suffit donc de trouver $g\in L^2([0,1])$ qui ne soit pas bornée presque partout.

Prenons par exemple $g(t)=\dfrac{3}{4t^{\frac{1}{4}}}$. On a $g\in L^2$.

On construit alors la fonction $f\in H_0^1$ telle que $f(x)=\int_0^x g(t)dt=x^{\frac{3}{4}}$.

Si f appartenait à $T_{\mathcal{H}}(E')$, il existerait $\mu\in E'$ tel que pour tout $x\in[0,1]$, on aurait $f(x)=\int_0^x\mu([t,1])dt$.

Cela impliquerait : $\mid fx)\mid\leq\int_0^x\mid\mid\mu\mid\mid dt\leq\mid\mid\mu\mid\mid x$ ce qui est impossible.

1.4 Etude de la surjectivité de ψ

1.4.1 Construction d'un espace préhilbertien

Rappel : Un espace préhilbertien est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, non complet pour la norme associée au produit scalaire.

Soit $T\in Ł^+(E)$ fixé. On note $\mathcal{H}_0=T(E')$. Montrons que $\mathcal{H}_0$ est un sous espace pré-hilbertien pour le produit scalaire défini par :

pour tous h, k dans $\mathcal{H}_0$, :

$<h,k>_{\mathcal{H}_0}=<h,\nu>_{E,E'}$ où $k=T(\nu)$.

preuve :

Soit h,k dans $\mathcal{H}_0$, montrons que $<h,k>_{\mathcal{H}_0}$ est bien défini. Par définition de h et k, il existe $\mu\in E'$ tel que $h=T(\mu)$ et il existe $\nu\in E'$ tel que $k=T(\nu)$. Supposons qu'il existe $\nu'\in E'$ tel que $k=T(\nu')$, on a

$$\begin{aligned}<h,\nu>_{E,E'} &=<T(\mu),\nu>_{E,E'}=<T(\nu),\mu>_{E,E'}\\ &=<T(\nu'),\mu>_{E,E'}=<T(\mu),\nu'>_{E,E'}\\ &=<h,\nu'>_{E,E'}\ .\end{aligned}$$

Ainsi $<h,k>_{\mathcal{H}_0}$ est bien défini. .

De plus, $<h,k>_{\mathcal{H}_0}=<T(\mu),\nu>_{E,E'}=<T(\nu),\mu>_{E,E'}$.

Comme $T\in Ł^+(E)$, $<.,.>_{\mathcal{H}_0}$ est une forme bilinéaire symétrique positive.

Montrons qu'elle est bien définie positive.
Soit $h \in \mathcal{H}_0$ tel que $< h, h >_{\mathcal{H}_0} = 0$, On applique l'inégalité de Cauchy Schwartz d'où pour tout h, k dans $\mathcal{H}_0$, $< h, k >_{\mathcal{H}_0} = 0$.
Soit $\nu \in E'$ tel que $k = T(\nu)$, $< h, k >_{\mathcal{H}_0} =< h, \nu >_{E,E'} = 0$. Cette égalité est vraie pour tout $\nu \in E'$ donc $h = 0$.
On a bien un produit scalaire sur $\mathcal{H}_0$.

1.4.2 $\mathcal{H}_0$ n'est pas un espace de Hilbert

Montrons que si f, g sont dans $\mathcal{H}_0$, on a $< f, g >_{\mathcal{H}_0} =< f, g >_{H_0^1}$.
Il existe μ et ν dans E' tels que $f = T(\mu)$ et $g = T(\nu)$.
Comme $\mathcal{H}_0 = \{f \in L^2, f(x) = \int_0^x \mu([t,1])dt, \mu \in E'\}$, on a
$< f, g >_{\mathcal{H}_0} =< T(\mu), \nu >_{E,E'} = \int_0^1 \int_0^x \mu([t,1])dtd\nu(x)$, donc

$$\begin{aligned} < f, g >_{\mathcal{H}_0} &= \int_0^1 (\int_0^1 \mathbf{1}_{[t,1]}(x)d\nu(x))\mu([t,1])dt \\ &= \int_0^1 \nu([t,1])\mu([t,1])dt \\ &=< f, g >_{H_0^1} . \end{aligned}$$

Si $\mathcal{H}_0$ était un espace de Hilbert, il serait complet donc fermé pour son produit scalaire, comme on a le même produit scalaire dans $\mathcal{H}_0$ et dans H_0^1, $\mathcal{H}_0$ serait fermé dans H_0^1 muni de son produit scalaire. On aurait donc $\mathcal{H}_0 = \overline{\mathcal{H}_0} = H_0^1$ ce qui est faux.

1.4.3 Montrons qu'il existe $K = K_T \leqslant 0$ tel que pour tout $\mu \in E'$,

$$|| T(\mu) ||_\infty \leqslant K || T(\mu) ||_{\mathcal{H}_0} . \tag{1.1}$$

Par définition, $|| T(\mu) ||_\infty = \sup_{||\nu||_{E'} \leq 1} |< T(\mu), \nu >_{E,E'}| = \sup_{||\nu||_{E'} \leq 1} |< T(\nu), \mu >_{E,E'}|$.
On sait que T est continue de E' faible dans E faible, on a donc T continue de E' fort dans E faible.
Ainsi $T(B_{E'})$ est faiblement bornée dans E i.e. $\forall \mu \in E'$, $\sup_{||\nu||_{E'} \leq 1} |< T(\nu), \mu >| < \infty$.
D'après Banach Steinhaus, comme on est dans un e.l.c. quasi complet, on obtient :
$\sup_{||\nu||_{E'} \leq 1} || T(\nu) ||_\infty = L < \infty$.
D'autre part, avec Cauchy Schwartz,
$|< T(\mu), \nu >_{E,E'}| = |< T(\mu), T(\nu) >_{\mathcal{H}_0}| \leq || T(\mu) ||_{\mathcal{H}_0} || T(\nu) ||_{\mathcal{H}_0}$.
Si $|| \nu ||_{E'} \leq 1$, $|| T(\nu) ||_{\mathcal{H}_0} = \sqrt{|< T(\nu), \nu >_{E,E'}|} \leq \sqrt{|| T(\nu) ||_\infty}$
donc $|| T(\mu) ||_\infty \leqslant \sqrt{L} \, || T(\mu) ||_{\mathcal{H}_0}$.
Avec $K = \sqrt{L}$, on obtient le résultat souhaité.

1.4.4 Construction d'un antécédent de T par ψ

$\mathcal{H}_0$ n'est pas un espace de Hilbert donc ne peut pas être un sous espace hilbertien de E. On considère $\tilde{H}$ le complété de $\mathcal{H}_0$ (unique à un isomorphisme près) muni d'un produit scalaire $< ., . >_{\tilde{H}}$ qui prolonge le produit scalaire $< ., . >_{\mathcal{H}_0}$ sur $\mathcal{H}_0$. Tout élément de $\tilde{H}$ peut être considéré comme la limite d'une suite de Cauchy de $\mathcal{H}_0$ dans $\tilde{H}$.
L'inégalité (1.1) est conservée par passage au complété par continuité de la norme. On a donc, pour tout $h \in \tilde{H}$ $\quad || h ||_\infty \leq K || h ||_{\tilde{H}}$.
Il faut montrer que $\tilde{H}$ s'injecte dans E.
Soit $\tilde{f} \in \tilde{H}$ et $\tilde{f}$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}_0$. Il existe une suite de Cauchy $(f_n)_n$ de $\mathcal{H}_0$ telle que $\tilde{f} = \lim_{\tilde{H}} f_n$.
Il existe donc une suite $(\mu_n)_n$ de E' telle que $\forall n, f_n = T(\mu_n)$.
$|| T(\mu_n) - T(\mu_m) ||_\infty \leq K || f_n - f_m ||_{\mathcal{H}_0}$.
La suite $(f_n)_n$ est donc de Cauchy dans $(E, || \, . \, ||_\infty)$ qui est un espace de Banach donc $(f_n)_n$ est convergente dans E vers f.

De plus, par continuité de la norme, $\| T(\mu_n) \|_\infty \to \| f \|_\infty$
et $\| T(\mu_n) \|_{\mathcal{H}_0} \to \| \tilde{f} \|_{\tilde{\mathcal{H}}}$.
L'inégalité (1.1) implique

$$\| f \|_\infty \leq K \| \tilde{f} \|_{\tilde{\mathcal{H}}} \tag{1.2}$$

On considère l'application $\Phi : \begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{H}} & \longrightarrow & E \\ \tilde{f} & \mapsto & f \end{array}$

Il faut montrer que f est indépendante du choix de la suite de Cauchy pour avoir une application.
Soit $\tilde{f} \in \tilde{\mathcal{H}}$ et soient $(\mu_n)_n$ et $(\nu_n)_n$ deux suites de E' convergentes vers $\tilde{f}$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$.
D'après ce qui précède, il existe f et g dans E telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} T(\mu_n) = f$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T(\nu_n) = g$ dans $(E, \| \cdot \|_\infty)$.
Par continuité de la norme infinie, $\| T(\mu_n) - T(\nu_n) \|_\infty \to \| f - g \|_\infty$ et $\| T(\mu_n) - T(\nu_n) \|_{\tilde{\mathcal{H}}} \to 0$
L'inégalité (1.2) implique $\| f - g \|_\infty$ d'où $f = g$.
Ainsi Φ est bien définie.
De plus, Φ est linéaire.
Montrons que Φ est injective.
Soit $\tilde{h} \in \tilde{\mathcal{H}}$ telle que $h = 0$, il existe une suite de Cauchy $(\mu_n)_n$ de E' telle que $\lim\limits_{\tilde{\mathcal{H}}} T(\mu_n) = \tilde{h}$ et $\lim\limits_{E} T(\mu_n) = h = 0$.
Soit $\nu \in E'$, on a $T(\nu) \in \mathcal{H}_0$ et $T(\mu_n) \in \mathcal{H}_0$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} < T(\mu_n), T(\nu) >_{\mathcal{H}_0} &= \lim_{n\to+\infty} < T(\mu_n), T(\nu) >_{\tilde{\mathcal{H}}} \\ &= < \tilde{h}, T(\nu) >_{\tilde{\mathcal{H}}} \text{ par continuité du produit scalaire} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} < T(\mu_n), T(\nu) >_{\mathcal{H}_0} &= \lim_{n\to+\infty} < T(\mu_n), \nu >_{E,E'} \\ &= < h, \nu >_{E,E'} \text{ par continuité du produit scalaire} \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc pour tout $\nu \in E'$, $< \tilde{h}, T(\nu) >_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0$ donc pour tout $k \in \mathcal{H}_0$, $< \tilde{h}, k >_{\tilde{\mathcal{H}}} = 0$.
Par densité de $\mathcal{H}_0$ dans $\tilde{\mathcal{H}}$, cette inégalité est vraie pour tout $k \in \tilde{\mathcal{H}}$.
Avec le théorème d'Hahn Banach, on obtient $\tilde{h} = 0$.
Ainsi Φ est injective.

On note $\mathcal{H} = \Phi(\tilde{\mathcal{H}})$. On a $\mathcal{H} \subset E$.
Soient h_1 et h_2 dans $\tilde{\mathcal{H}}$, on pose $< \Phi(h_1), \Phi(h_2) >_{\mathcal{H}} = < h_1, h_2 >_{\tilde{\mathcal{H}}}$.
On définit ainsi un produit scalaire sur $\mathcal{H}$.

Comme ϕ conserve la norme, l'inégalité (1.2) donne $\|f\|_\infty \leq K \|f\|_{\mathcal{H}}$.
Ainsi $\mathcal{H}$ est un sous espace hilbertien de E.

Montrons que $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$.
$\mathcal{H}_0 \subset E$ donc si $h \in \mathcal{H}_0$, en prenant la suite constante égale à h, on obtient une suite de Cauchy dans $\mathcal{H}_0$ donc elle est convergente dans $\tilde{\mathcal{H}}$ et sa limite est h. De même, elle est convergente dans E et sa limite est h donc $\Phi(h) = h$.
Ainsi $\Phi(\mathcal{H}_0) = \mathcal{H}_0$.
Comme Φ est bijective, continue et conserve le produit scalaire (par définition du produit scalaire de $\mathcal{H}$) et comme $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\tilde{\mathcal{H}}$, on obtient $\mathcal{H}_0$ dense dans $\mathcal{H}$.

Vérifions que $\mathcal{H}$ est bien l'antécédent de T par ψ.
Soit $\mu \in E'$, par définition de $\mathcal{H}_0$, on a pour tout $h \in \mathcal{H}_0$, $< h, \mu >_{E,E'} = < T(\mu), h >_{\mathcal{H}_0}$.
Comme $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$ et que le produit scalaire est continue, on obtient pour tout $h \in \mathcal{H}$, $< h, \mu >_{E,E'} = < T(\mu), h >_{\mathcal{H}}$.
D'autre part, si $T_{\mathcal{H}}$ est l'image de $\mathcal{H}$ par ϕ, on a pour tout $h \in \mathcal{H}$, pour tout $\mu \in E'$, $< h, \mu >_{E,E'} = < T_{\mathcal{H}}(\mu), h >_{\mathcal{H}}$.
Dans le théorème de Rietz, on a l'unicité donc pour tout $\mu \in E'$, $T_{\mathcal{H}}(\mu) = T(\mu)$ i.e. $T_{\mathcal{H}} = T$.

On a donc bien trouvé l'antécédent de T.

L'hypothèse de complétude de E n'intervient qu'au niveau du prolongement de $\mathcal{H}_0$ pour en faire un espace complet mais pas lors de l'utilisation de Banach Steinhaus qui n'utilise que le fait que E' soit complet.

1.4.5 Retour à l'exemple

Montrons que si $\mu \in E'$, on a $T(\mu)(x) = \int_0^1 \min(x,u) d\mu(u)$.

$$\begin{aligned} \int_0^x \mu([t,1]) dt &= \int_0^x \left(\int_0^1 \mathbf{1}_{[t,1]}(u) d\mu(u)\right) dt \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \mathbf{1}_{[0,x]}(t) \mathbf{1}_{[0,u]}(t) dt\right) d\mu(u) \\ &= \int_0^1 \min(x,u) d\mu(u) \\ &= T(\mu)(u). \end{aligned}$$

On voit que T est un opérateur à noyau si μ est une mesure de densité car être un noyau dans E' signifie s'écrire $T(\mu)(x) = \int h(x,u) d\mu(u)$. On pourra donc faire une décomposition spectrale.
Remarque : D'autre part, on remarque que l'on retrouve le mouvement brownien.
Pour $g(t) = \mathbf{1}_{[0,t_0]}(\mathbf{t})$, on a $f(x) = \int_0^x \mathbf{1}_{[0,t_0]}(\mathbf{t}) \mathbf{dt} = \min(\mathbf{t_0}, \mathbf{x})$.
f est dérivable presque partout et là où elle est dérivable, sa dérivée est $\mathbf{1}_{[0,t_0]}$.