Chapitre 1

Pré-requis nécessaires à l'étude des sous espaces hilbertiens

Sylvie Champier

1.1 Rappels de topologie

1.1.1 Topologie sur un ensemble

On appelle **topologie** sur un ensemble E la donnée d'une famille $\mathcal{O}$ de parties de E, dites **ouvertes** telles que :
a) la partie vide et l'ensemble E sont ouverts.
b) Tout réunion d'ouverts est une partie ouverte.
c) Toute intersection finie d'ouverts est une partie ouverte.

Définition 1 *La topologie définie par $\mathcal{O}_1$ est* **moins fine** *que celle définie par $\mathcal{O}_2$ si et seulement si $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$, autrement dit, $\mathcal{O}_1$ a moins d'ouverts que $\mathcal{O}_2$.*

Si une topologie a moins d'ouverts qu'une autre, elle possède par contre plus de compacts.

L'ensemble des topologies sur E possède un plus petit élément : la topologie grossière $\mathcal{O} = \{\phi, E\}$ et un plus grand élément qui est la topologie discrète $\mathcal{O} = \mathcal{P}(E)$.

1.1.2 Ecarts

On appelle écart sur E toute application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ symétrique, vérifiant l'inégalité triangulaire et telle que $d(x, x) = 0$.

Remarque 1 *Soit d un écart*
d est une distance si et seulement si $d(x, y) = 0 \iff x = y$.

Remarque 2 *si d et d' sont deux écarts, $d" = sup(d, d')$ est un écart.*

Définition 1 *$\mathcal{D}$ est une famille filtrante croissante d'écarts si et seulement si pour tous écarts d, d' il existe $d" \in \mathcal{D}$ tel que $d \leq d"$ et $d' \leq d"$.*

Définition 2 *T un espace topologique. Soit $x \in T$.*
On appelle **voisinage** *de x tout sous ensemble V de T qui contient un ouvert contenant x.*
On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x.
On appelle **base de voisinages** *ou système fondamental de $x \in T$, toute famille $\mathcal{W}$ de voisinage de x tel que tout V voisinage de x contienne un élément $W \in \mathcal{W}$.*

Théorème 1 *On suppose qu'à chaque $x \in E$, on associe une famille $\mathcal{V}(x)$ de parties de E vérifiant les propriétés suivantes*
(i) $\mathcal{V}(x)$ est héréditaire à droite i.e. si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset W$ alors $W \in \mathcal{V}(x)$.
(ii) $\mathcal{V}(x)$ est stable par intersection finie.
(iii) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $x \in V$.
(iv) $\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall y \in W$, $V \in \mathcal{V}(y)$.
Alors il existe sur E une topologie unique telle que pour chaque $x \in E$, $\mathcal{V}(x)$ constitue la famille des voisinages de x pour cette topologie.

Remarque 3 *Ce théorème permet de dire que l'on peut définir une topologie par la donnée de ses voisinages pour chacun des points de E d'où l'intérêt de la notion de base de voisinage.*

Proposition 1 *Soit $\mathcal{D}$ une famille filtrante croissante d'écarts sur un ensemble E. Pour chaque $x \in E$, $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(x) = \{B_d(x,r), d \in \mathcal{D}, r \in \mathbb{R}^{+*}\}$ est une base de voisinage de x pour une topologie sur E notée $\mathcal{T}_{\mathcal{D}}$.*

1.1.3 Caractérisation de la continuité dans un espace vectoriel topologique

Définition 2 *Soit f une application d' un espace topologique E dans un espace topologique F. Soit $x_0 \in E$*
f est continue en x_0 si et seulement si pour tout voisinage W de $f(x_0)$, $f^{-1}(W)$ est un voisinage de x_0.

Proposition 2 *Soit f une application d' un espace topologique E dans un espace topologique F.*
f est continue sur E
si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est un ouvert de E
si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de F est un fermé de E
si et seulement si pour toute partie $B \subset E$, on a $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

Proposition 3 *Si E et F sont des espaces métriques, f est continue en $a \in E$ si et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de E, si $(x_n)_n$ est convergente vers a alors la suite $(f(x_n))_n$ est convergente vers $f(a)$*

Ce résultat est encore vrai dans un espace topologique admettant une base dénombrable de voisinages car on pourra construire une suite.

Définition 3 *Soit I un ensemble préordonné filtrant croissant et E un ensemble quelconque.*
On appelle **suite généralisée** *sur E toute application $i \mapsto x_i$ de I dans E.*
Lorsque $I = \mathbb{N}$, on obtient les suites usuelles.

Si E est un espace vectoriel topologique, on peut introduire une notion de convergence pour les suites généralisées.

Définition 4 *Soit $(x_i)_i$ une suite généralisée de E espace topologique.*
La suite $(x_i)_i$ est convergente vers $x \in E$ si et seulement si pour tout voisinage V de x, il existe $i_0 \in I$ tel que $x_i \in V$ pour tout $i \geq i_0$.

Remarque 4 *La proposition est vraie avec les suites généralisées dans un espace topologique.*

1.2 Espaces localement convexes

1.2.1 Définition

Dans ce paragraphe, E est un espace vectoriel réel ou complexe.
Une semi-norme p sur E définit un écart $d_p(x,y) = p(x-y)$ sur E.

On peut donc associer à toute famille filtrante croissante $\mathcal{P}$de semi-normes sur E une topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ sur E telle que la famille des voisinages $\mathcal{V}(x)$ de tout point x admette comme base l'ensemble des boules $B_p(x,r), p \in \mathcal{P}, r > 0$.

Remarque 5 *La topologie $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ possède les propriétés suivantes :*
a) La famille $\mathcal{V}(x)$ s'obtient à partir de $\mathcal{V}(0)$ par translation par x.
b) La famille $\mathcal{V}(0)$ admet comme base les boules $B_p(0,r)$ qui sont des disques absorbants i.e. pour tout $x \in E, \exists \lambda > 0, \{x\} \subset \lambda B_p(0,r)$.

Réciproquement, la donnée d'une famille filtrante décroissante $\mathcal{V}$ de disques absorbants définit une famille filtrante croissante de semi-normes $\mathcal{P}$ obtenue en associant à chaque $V \in \mathcal{V}$, $p_V(x) = Inf\{\lambda > 0, x \in \lambda V\}$ et p_V est une semi-norme. De plus, si V et W sont deux disques absorbants de E tels que $W \subset V$ alors $p_V \leq p_W$.

Définition 5 *Une topologie sur E est* **localement convexe** *lorsqu'elle est définie par une famille filtrante croissante de semi-normes $\mathcal{P}$.*

1.2.2 Exemples

Premier exemple : $E = \mathbb{R}^X$
La topologie de la convergence simple est définie par la famille filtrante croissante des semi-normes
$p_A(f) = \sup_{t \in A} \mid f(t) \mid$
pour toute partie finie $A \subset X$.
En ce sens, la convergence simple apparait comme la convergence uniforme sur les parties finies.

Deuxième exemple : Topologie quotient :
$(E, \mathcal{P})$ espace localement convexe.
N un sous espace vectoriel de E.
On définit $E/N = \{\dot{x}, x \in E\}$ où $\dot{x} = \{y \in E, x - y \in N\}$.
La topologie la plus fine sur E/N rendant continue la projection canonique $\pi : E \longrightarrow E/N$ est déterminée par la famille filtrante croissante $\dot{\mathcal{P}}$ des semi-normes quotients.
$\forall p \in \mathcal{P}, \dot{p}(\dot{x}) = \inf_{z \in \dot{x}} p(z)$.
On l'appelle la **topologie quotient** et elle est localement convexe.

Troisième exemple : Sur tout espace vectoriel E , il existe une topologie localement convexe plus fine que toutes les autres appelée topologie fine. Elle est définie par la famille de toutes les semi-normes sur E et admet comme base de voisinage de zéro la famille de tous les disques absorbants.
Lorsque E est muni de cette topologie, alors le dual algébrique de E est égale au dual topologique de E i.e. $E^\star = E'$.
On en déduit que toute topologie fine est séparée.

1.2.3 propriétés

Définition 6 *E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, C une partie convexe de E contenant l'origine. On appelle jauge de C la fonction p de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie pour tout $x \in E$ par*
$p(x) = inf\{\lambda > 0, x \in \lambda C\}$. Si cet ensemble est vide, on pose $p(x) = +\infty$

Remarque 6 *La jauge est sous-linéaire, et est par conséquent une fonction convexe.*
On a : $\{x \in E, p(x) < 1\} \subset C \subset \{x \in E, p(x) \leq 1\}$
Si C est un ouvert de E, alors $C = \{x \in E, p(x) < 1\}$
Si C est un fermé de E, alors $C = \{x \in E, p(x) \leq 1\}$
La jauge d'un convexe C contenant 0 ne prend que des valeurs finies si et seulement si C est absorbant i.e. $\forall v \in E, \exists \alpha > 0, \forall \lambda I\!\!K, \mid \lambda \mid \leq \alpha \Longrightarrow \lambda v \in C$
Tout voisinage de l'origine est un ensemble absorbant (résulte de la continuité de l'application qui à λ

associe λv, v étant fixé.
Pour un espace vectoriel réel, si C est symétrique par rapport à 0 avec une jauge évitant la valeur $+\infty$, la jauge est alors une semi-norme.

Proposition 4 *Un espace vectoriel topologique E est dit localement convexe s'il vérifie l'une des deux propriétés équivalentes suivantes :*
(i) La topologie de E peut être définie par une famille filtrante de semi-normes.
(ii) 0 possède une base de voisinages formée de convexes.

Démonstration :
(i) $\Longrightarrow$ (ii) En effet toute semi-norme sur E est une fonction convexe et donc pour tout $R > 0$ l'ensemble des x de E vérifiant $p(x) < R$ est convexe.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons d'abord que E est un espace réel. Si V est un voisinage convexe de 0 alors $W = V \cap (-V)$ est un voisinage convexe et symétrique de 0. Il est absorbant. Il en résulte que la jauge de W est une semi-norme sur E et ces semi-normes définissent la topologie de E. Supposons maintenant que E est un espace complexe. Nous allons montrer que tout voisinage convexe de l'origine contient un voisinage convexe équilibré. Soit en effet V un voisinage convexe de 0. Par application de la continuité de l'application de $\mathbb{C} \times E$ dans E, qui à (λ, v) associe $lambdav$, , il existe $\alpha > 0$ et un voisinage W de 0 tels que $|\lambda| < \alpha$ et $v \in WW \Longrightarrow \lambda v \in V$. Soit μ un scalaire vérifiant $|\mu| < \alpha$. Alors μW est un voisinage de 0 inclus dans V. Si $w = \mu v \in \mu W$ et $\mid \lambda \mid \leq 1$ alors $\mid \lambda\mu \mid < \alpha$ et $\lambda w = \lambda \mu v \in V$. Ceci entraîne que x appartient au noyau équilibré de V . Ce noyau équilibré (contenant μW) est un voisinage de 0. Son enveloppe convexe est un voisinage convexe et équilibré de 0 inclus dans V (puisque V est convexe). La jauge de ce noyau équilibré est une semi-norme sur E (ce noyau est un voisinage de 0 donc absorbant). Ces semi-normes définissent la topologie de E.

Théorème 2 *Pour qu'un espace localement convexe E défini par la famille filtrante croissante de semi-norme $(p_i)_{i\in I}$ soit un espace séparé, il faut et il suffit que pour tout $v \neq 0, v \in E$, il existe une semi-norme p_i telle que $p_i(v) \neq 0$.*

Théorème 3 *Un espace localement convexe est métrisable s'il est séparé et si sa topologie peut être définie par une famille dénombrable de semi-normes.*

1.2.4 Caractérisation de la continuité dans un espace vectoriel topologique localement convexe

Théorème 4 *Soient $(E, \mathcal{P})$, $(F, \mathcal{Q})$ 2 espaces localement convexes, et $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ étant des familles de semi-normes définissant les topologies et f une application de E dans F. Alors*
f est continue en $v \in E$
si et seulement si $\forall q \in \mathcal{Q}, \forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathcal{P}, \exists \alpha > 0, \forall w \in E, p(v - w) < \alpha \Longrightarrow q(f(v) - f(w)) < \varepsilon$
Si on suppose de plus que f est linéaire, on a équivalence entre
(i) f est continue sur E
(ii) f est continue à l'origine
(iii) Pour toute semi-norme $q \in \mathcal{Q}$, il existe $M > 0$ et une semi-norme $p \in \mathcal{P}$ tels que $q(f(x)) \leq Mp(x)$ pour tout $x \in E$

1.3 Espace dual E'

E est un espace vectoriel topologique, E' son dual topologique i.e. l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

Remarque 7 *Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe, on peut munir son espace dual topologique E' de la famille de semi-normes $\tilde{p}_p(x') = \sup_{x \in B_p(0,1)} |< x, x' >|$ où p est une semi-norme de la famille filtrante croissante de semi-normes sur E.*
La convergence est équivalente à la convergence uniforme sur les bornés.

1.3.1 Théorèmes de Hahn Banach

Théorème 5 *de Hahn Banach :*
E espace vectoriel réel, p semi-norme sur E, M un sous espace vectoriel de E.
Soit f une forme linéaire définie sur M et telle que $\mid f \mid \leq p$.
Alors il existe une forme linéaire F définie sur E, prolongeant f et telle que $\mid F \mid \leq p$.

1.3.2 Cas particulier d'un e.v. normé

On suppose que E est un espace vectoriel normé. E' est muni de la norme duale :
$|| f ||_{E'} = \sup_{x \in E, ||x|| \leq 1} \mid f(x) \mid$.
On note $< x, f >$ au lieu de $f(x)$ et on dit $< ., . >$ est le produit scalaire dans la dualité E', E.

Corollaire 1 *Soit E un e.v. normé,*
$\forall x \in E, || x || = \sup_{||x'|| \leq 1, x' \in E'} |< x', x >|$.

Autre version plus géométrique du théorème d'Hahn-Banach :

Théorème 6 *Soit $A \subset E$, $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. on suppose A fermé et B compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Rappel : Hyperplan $= \{x \in E, f(x) = \alpha\}$ où f est une forme linéaire non nulle (non nécessairement continue) et α est un réel.
L'hyperplan est fermé si et seulement si f est continue.

Corollaire 2 *Soit $F \subset E$ un sous espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E'$, $f \neq 0$ tel que $\forall x \in E$, $< x, f >= 0$.*

Remarque 8 *On utilise souvent ce corollaire pour montrer qu'un sous espace est dense. On considère alors une forme linéaire continue f sur E telle que $f = 0$ sur F et on prouve alors que f est identiquement nulle.*

1.3.3 Bidual

Tout élément x de E définit un élément $\tilde{x}$ de $E"$ par $\tilde{x}(x') =< x, x' >$.
Dans le cas où E est un e.v.n., le corollaire 1.3.3. dit alors que $J : x \longrightarrow \tilde{x}$ est une isométrie de E dans $E"$.
Attention, ce n'est pas une bijection.

Remarque 9 *Si E est de dimension finie, $x \longrightarrow \tilde{x}$ est bijective.*

Proposition 5 *Soit E un espace vectoriel normé.*
$E" = (E')'$ est un espace de Banach pour sa norme duale.

Proposition 6 *Tout espace normé E s'identifie avec sa norme à un sous espace de son bidual $E"$. Pour que E soit un espace de Banach, il faut et il suffit qu'il soit fermé dans $E"$.*

Définition 7 *E réflexif $\iff E = E"$.*

Remarque 10 *Si E est un e.v.n. réflexif alors E est complet.*

1.3.4 Dual d'un sous espace

Théorème 7 *F un sous espace fermé de E e.v. normé.*
E/F muni de la norme $|| \dot{x} || = Inf\{|| x ||, x \in \dot{x}\}$.
Alors le dual $(E/F)'$ s'identifie (i.e. de manière bijective) isométriquement à $F^\circ = \{x' \in E', x' = 0$ sur $F\}$, muni de la norme de E'.

1.4 Topologies faibles

1.4.1 Topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications

X un ensemble, $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espace topologiques.
Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$
Problème : On veut munir X d'une topologie qui rende continues toutes les φ_i et si possible trouver la topologie $\mathcal{T}$ la moins fine i.e. avec le minimum d'ouverts.
En effet, la topologie discrète marche mais elle n'est pas très économique !
Pour tout $i \in I$, pour tout O_i ouvert de Y_i, $\varphi_i^{-1}(O_i)$ doit être un ouvert de X.
$\{\varphi_i^{-1}(O_i), O_i$ ouvert de $Y_i, i \in I\}$ constitue une famille d'ouverts de X notée $(U_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$

Problème : Construire la famille $\mathcal{F}$ de sous ensemble de X, la plus petite qui soit stable par intersections finies, réunions quelconques et contenant U_λ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Réponse : On prend d'abord les intersections finies d'où
$\mathcal{A} = \{\bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda, \Gamma fini, \Gamma \subset \Lambda\}$, $\mathcal{A}$ est stable par intersections finies.
puis on pose $\mathcal{F} = \{$réunions quelconques d'éléments de $\mathcal{A}\}$.
$\mathcal{F}$ est stable par réunions quelconques et par intersections finies.

1.4.2 Topologie faible $\sigma(E, E')$.

Définition 8 *Soit E un espace vectoriel. Pour tout $f \in E'$, on note $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi_f(x) =< f, x >$.*
La **topologie faible** *$\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications φ_f, $f \in E'$.*

Proposition 7 *E muni de sa topologie faible est localement convexe.*

Preuve : Les applications φ_f, $f \in E'$ sont des semi-normes sur E. De plus, elles forment une famille filtrante croissante sur E. En effet, soient f et g deux éléments de E', on pose $h = \mathrm{Sup}(f, g)$, on a $\varphi_f \leq \varphi_h$ et $\varphi_g \leq \varphi_h$ et $h \in E'$.

Proposition 8 *La topologie faible est séparée.*

Preuve : avec Hahn-Banach géométrique.

Proposition 9 *Soit $x_0 \in E$. On obtient une base de voisinages de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$ en considérant tous les ensembles de la forme $V = \{x \in E, \forall i \in I, |< f_i, x - x_0 >|< \epsilon\}$ où I est un ensemble fini, $f_i \in E'$ et $\epsilon > 0$.*

Remarque 11 *On peut montrer qu'en dimension infinie, tout voisinage de x_0 pour la topologie $\sigma(E, E')$ contient une droite passant par x_0.*

Proposition 10 *Soit E un espace vectoriel . Soit $(x_n)_n$ une suite de E.*
$x_n \rightharpoonup x$ pour la topologie faible $\iff \forall f \in E', < f, x_n >\longrightarrow< f, x >$.

Proposition 11 *1) Si E est un e.v. normé de dimension finie, la convergence faible équivaut à la convergence forte.*
2) Dans un e.v.normé, tout ensemble ouvert (resp fermé) pour la topologie faible est ouvert (resp fermé) pour la topologie forte.

1.4.3 Topologie faible$\star$, $\sigma(E', E)$

Définition 9 *Pour tout $x \in E$, on note $\varphi_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi_x(f) =< f, x >$.*
La topologie faible $\star$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les applications $(\varphi_x)_{x\in E}$

Remarque 12 *Comme $E \subset E''$, la topologie $\sigma(E', E)$ est moins fine que $\sigma(E', E")$.*

Théorème 8 *Soit $\varphi : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire continue pour la topologie $\sigma(E', E)$.*
Alors il existe $x \in E$ tel que $\varphi(f) =< f, x >$ pour tout $f \in E'$.

1.5 Propriété des espaces réflexifs

Théorème 9 *Soit E un espace de Banach.*
E est réflexif si et seulement si $B = \{x \in E, \| x \| \leq 1\}$ est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Ce théorème va servir dans le cas d'un Hilbert.

Théorème 10 *Soient E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_n$ une suite bornée de E.*
Alors il existe une sous suite convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$.

1.6 Espaces séparables

Définition 10 *Un espace E est séparable si et seulement si il existe un sous ensemble de E dénombrable et dense dans E*

Proposition 12 *Soient E un espace de Banach séparable, $(f_n)_n$ une suite bornée de E'.*
Alors il existe une sous suite extraite $(f_{n_k})_k$ qui est convergente pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Preuve : C'est un corollaire du théorème 10 .

1.7 Espaces de Hilbert

Définition 11 *Soit H un espace vectoriel. H est un espace de Hilbert si H est muni d'un produit scalaire (forme bilinéaire symétrique définie positive) noté $(.,.)$ et si H est complet pour la norme*
$\| u \|_H = \sqrt{(u,u)}$.
Si H n'est pas complet, on parle d'espace pré-hilbertien.

Théorème 11 *Théorème de représentation de Riesz Fréchet*
Soient H un espace de Hilbert et $\varphi \in H'$.
Alors il existe un unique élément $f \in H$ tel que $\forall v \in H, \quad < v, \varphi >= (f, v)$.
De plus, on a $\| f \|_H = \| \varphi \|_{H'}$

Corollaire 3 *L'application de H' dans H qui à φ associe f tel que $\forall v \in H, \quad < \varphi, v >= (f, v)$ est un isomorphisme isométrique qui permet d'identifier H et H'.*

Corollaire 4 *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Proposition 13 *Soit H un espace préhilbertien.*
Si M est un sous espace vectoriel fermé de H alors $H = M \oplus M^{\perp}$.

Corollaire 5 *Soit H un espace préhilbertien et M est un sous espace vectoriel.*
M est dense dans H si et seulement si $\bar{M}^{\perp} = M^{\perp} = \{0\}$.

<u>Références :</u>

Brézis H. : Analyse fonctionnelle : théorie et applications, éditions Dunod, 1999.
Buchwalter H. : Variations sur l'analyse en maîtrise de mathématiques, éditions Ellipses, 1992.
Hirsch F., Lacombe G. : "Elements of Functional Analysis", Springer 1999.
Schwartz L. : Topologie générale et analyse fonctionnelle, édition Hermann, 1997.
Rudin W. : Functional Analysis, McGraw-Hill Science, 1991.

Chapitre 2

Etude des sous espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique dans le cas réel - Noyau d'un sous espace hilbertien

Sylvie Champier

E **est un espace vectoriel topologique séparé, localement convexe.**

2.1 Sous espaces hilbertiens d'un espace vectoriel topologique

Définition 12 *$\mathcal{H}$ un sous espace vectoriel de E est un* **sous espace hilbertien** *s'il est muni d'une structure hilbertienne i.e. d'une forme hermitienne (forme bilinéaire, symétrique, définie positive) telle que $\mathcal{H}$ soit complet pour la norme $\| x \|_{\mathcal{H}} = \sqrt{(x,x)_{\mathcal{H}}}$ et que l'injection naturelle de $\mathcal{H}$ dans E soit continue.*

Remarque 13 *La dernière condition revient à dire que sur $\mathcal{H}$ la topologie définie par la norme est plus fine que la topologie induite par celle de E, ce qui est équivalent à dire que la boule unité de $\mathcal{H}$ est bornée dans E.*

Dans toute la suite, on suppose que E est quasi complet pour sa topologie initiale i.e. toute partie fermée bornée de E est complète.

Proposition 14 *Soient E un evt localement convexe, séparé, quasi-complet, $\mathcal{H}$ un sous espace hilbertien de $E'^{\star}$ = dual algébrique de E' (i.e. ensemble des formes linéaires sur E').*
Alors $\mathcal{H} \cap E$ est un sous espace hilbertien de E.
Si $\mathcal{H}$ possède un sous espace dense contenu dans E ou une base hilbertienne contenue dans E alors $\mathcal{H}$ est un sous espace hilbertien de E.

On note **Hilb(E)**= { sous espaces hilbertiens de E}.

2.2 Noyau relatif à un e.v.t. localement convexe E sur $\mathbb{R}$

Soit E' dual topologique de E i.e. ensemble des formes linéaires continues sur E.

Définition 13 *On appelle* **noyau relatif** *à E une application linéaire de E' dans E, continue pour les topologies faibles $\sigma(E', E)$, $\sigma(E, E')$. Elle est alors a fortiori continue pour la topologie forte de E' et la topologie initiale de E.*

Soit H un noyau relatif à E, soit $e' \in E'$, on a $He' \in E$.
Si $f' \in E'$, on définit le produit scalaire $< He', f' >$.
On considère l'adjoint $H^\star$ de H défini par $H^\star =^t H : E' \longrightarrow E$",
$\forall e' \in E', \forall f' \in E', < H^\star e', f' >=< Hf', e' >$.

Remarque 14 *En fait $H^\star$ va de E' dans E car lorsqu'on munit E et E' des topologies faibles, E est reflexif.*

Définition 14 *H est* **hermitien** *si et seulement si $H^\star = H$ i.e. ${}^tH = H$.*
On a alors $< He', f' >=< Hf', e' >$ pour tout $e', f' \in E'$.
$H \geq 0$ si et seulement si $\forall e' \in E', < He', e' >\geq 0$.

Proposition 15 *Un noyau positif est hermitien.*

Proposition 16 *Toute application linéaire hermitienne de E' dans E est un noyau.*

Preuve : On va utiliser la caractérisation de la continuité de la remarque 4 et du théorème 4. Soit $e' \in E'$ une suite généralisée de E' i.e. $e' = (e'_i)_{i \in I}$ où I est une famille filtrante croissante d'indices. On suppose que $e' \longrightarrow 0$ pour $\sigma(E', E)$ i.e. $\forall f \in E, < f, e' >\longrightarrow 0$ pour la topologie de E.
$\forall \varepsilon > 0, \exists U \in \mathcal{V}(0), \forall f \in U, |< f, e' >| \leq \varepsilon$
Soit $f' \in E'$, on a $Hf' \in E$ donc $< Hf', e' >\longrightarrow 0$ i.e. $< f', He' >\longrightarrow 0$
donc $He' \longrightarrow 0$ pour tout $f' \in E'$ i.e. $He' \longrightarrow 0$ dans $\sigma(E, E')$.

Au lieu de considérer les applications linéaires de E' dans E, on peut considérer les formes bilinéaires sur $E' \times E'$.
Un noyau H définit une forme $\tilde{H}$ par $\tilde{H}(e', f') =< Hf', e' >$ $(\star)$

Proposition 17 *Pour qu'une forme bilinéaire sur $E' \times E'$ soit définie par une noyau suivant $(\star)$, il faut et il suffit qu'elle soit séparément faiblement continue et ce noyau est alors unique.*
La forme est hermitienne ssi le noyau est hermitien.
La forme est positive ssi le noyau est positif.

Preuve : $(\Longrightarrow)$ Soit H un noyau.
Si $e' \longrightarrow 0$ pour $\sigma(E', E)$ alors pour f' fixé dans E', $Hf' \in E$ et $< Hf', e' >\longrightarrow 0$
Si $f' \longrightarrow 0$ pour $\sigma(E', E)$, comme H est faiblement continue, $Hf' \longrightarrow 0$ pour $\sigma(E, E')$
donc $\forall e' \in E', < Hf', e' >\longrightarrow 0$.
$(\Longleftarrow)$ Soit B une forme bilinéaire séparément faiblement continue sur $E' \times E'$.
Soit $f' \in E'$, $e' \mapsto B(e', f')$ est une forme linéaire faiblement continue sur E' donc il existe un unique élément de E noté Hf' tel que $B(e', f') =< Hf', e' >$. cf théorème 1.4.8.
H est linéaire de E' dans E car B est linéaire par rapport à sa seconde variable.
Si $f' \longrightarrow 0$ dans $\sigma(E', E)$
$\forall e' \in E', B(e', f') \longrightarrow 0$ car B est faiblement continue sur $E' \times E'$.
donc $Hf' \longrightarrow 0$ dans $\sigma(E, E')$
i.e. H est faiblement continue daonc H est un noyau.

Remarque 15 *Soit $\tilde{H}^\star$ la forme associée à $H^\star$.*
$\tilde{H}^\star(e', f') =< \tilde{H}^\star f', e' >=< f', He' >=< He', f' >=< \tilde{H}(f', e')$.
donc $\tilde{H}^\star(e', f') = \tilde{H}(f', e')$.

Remarque 16 *Soit $E'^\star$ le dual algébrique de E'.*
Par définition de la topologie $\sigma(E', E'^\star)$, toute forme linéaire sur E' est continue pour $\sigma(E', E'^\star)$.

donc toute forme bilinéaire sur $E' \times E'$ est séparément continue.
Comme $E'^{\star} = E$ pour les topologies faibles, E' est le dual de $E'^{\star}$ pour $\sigma(E'^{\star}, E')$
et sa topologie faible correspondante est $\sigma(E', E'^{\star})$.
Conséquence : Toute forme bilinéaire sur $E' \times E'$ provient d'un noyau H relatif à $E'^{\star}$ muni de la topologie $\sigma(E'^{\star}, E')$.

Définition 15 *On munit E de la topologie $\sigma(E, E')$ et E' de la topologie $\sigma(E', E)$.*
$Ł(E', E) = \{$noyaux relatifs à $E\}$
$Ł^{+}(E) = Ł^{+}(E', E) = \{$noyaux ≥ 0 relatifs à E $\}$

Proposition 18 *$Ł^{+}(E)$ est un cône convexe saillant de $Ł(E', E)$.*

Preuve : Il est saillant car si H et $-H$ sont positifs, on a $< He', e' >= 0$ pour tout $e' \in E'$
donc $< Hf', e' >= 0$ pour tous $e', f' \in E'$ grâce à la formule

$$\begin{aligned} < e' + f', H(e' + f') > &= < e', He' > + < f', He' > + < e', Hf' > + < f', Hf' > \\ &= < f', He' > + < e', Hf' > = < Hf', e' > = 0 \end{aligned}$$

car un noyau positif est hermitien.
On a donc $Hf' = 0$ pour tout $f' \in E'$ d'où $H = 0$.

Dans toute la suite, Ł(E', E) est muni de la topologie de la convergence faible simple (i.e. la moins fine pour laquelle chaque application $H \mapsto < Hf', e' >$ soit continue).

Objectif : Montrer qu'il existe un isomorphisme naturel entre Hilb(E) et Ł$^{+}(E)$.

2.3 Noyau d'un sous espace hilbertien de E, application canonique de Hilb(E) dans Ł$^{+}(E)$.

Proposition 19 *Soit $\mathcal{H}$ un sous espace hilbertien de E, j son injection dans E, j est faiblement continue.*
$j^{\star} : E' \longrightarrow \mathcal{H}'$ est une application linéaire faiblement continue.

Preuve : si $e' \longrightarrow 0$ faiblement,
$\forall e \in E, < e, e' > \longrightarrow 0$.
Or $\forall h \in \mathcal{H}, jh \in E$
donc $< jh, e' > \longrightarrow 0$
i.e. $< h, j^{\star}e' > \longrightarrow 0$
d'où $j^{\star}e' \longrightarrow 0$ faiblement.
Conséquence $j^{\star}$ est faiblement continue.

De plus, d'après le théorème 11 de Riesz Fréchet, il existe un isomorphisme (isométrique) $\theta : \mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}$ car $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert.
On a pour tout $h' \in \mathcal{H}'$, $\theta h'$ est défini par :
$\forall h \in \mathcal{H}, < h, h' >= (\theta h', h)_{\mathcal{H}}$.
Comme c'est un isométrie, elle est continue pour les topologies fortes liées au produit scalaire sur l'espace de Hilbert donc pour les topologies faibles.

Définition 16 *$H : E' \xrightarrow{j^{\star}} \mathcal{H}' \xrightarrow{\theta} \mathcal{H} \xrightarrow{j} E$ est une application faiblement continue de E' dans E, linéaire.*
On dit que H est **le noyau de** *$\mathcal{H}$ ou le noyau associé à $\mathcal{H}$.*

Preuve de H faiblement continue :
θ est continue de $\mathcal{H}'$ muni de la topologie forte dans $\mathcal{H}$ muni de la topologie forte.
j est faiblement continue donc j est continue de $\mathcal{H}$ muni de la topologie forte dans E muni de la topologie faible.
Par hypothèse, $j^{\star}$ est continue de E' muni de la topologie faible dans $\mathcal{H}'$ muni de la topologie faible.

Montrons que $j^\star$ est continue de E' muni de la topologie faible dans $\mathcal{H}'$ muni de la topologie forte.
Avec la continuité faible, $j^\star(B_{E'})$ est faiblement borné dans $\mathcal{H}'$. On applique le théorème de Banach Steinhaus dans une espace localement convexe quasi complet, $j^\star(B_{E'})$ est fortement borné donc $j^\star$ est continue de E' muni de la topologie faible dans $\mathcal{H}'$ muni de la topologie forte.
Conséquence : H est faiblement continue de E' dans E.

En fait $H : E' \longrightarrow \mathcal{H}$.

Proposition 20 *Le noyau H de $\mathcal{H}$ est l'unique application de E' dans $\mathcal{H}$ telle que*
$\forall e' \in E', \forall h \in \mathcal{H}, (h, He')_{\mathcal{H}} =< h, e' >$.
En particulier, pour $e' \in E'$, $f' \in E'$, on a
$(Hf', He')_{\mathcal{H}} =< Hf', e' >$
donc $\| He' \|^2_{\mathcal{H}} =< He', e' > \geq 0$
donc H est un noyau ≥ 0.

La première formule de cette proposition donne une caractérisation du noyau d'un sous espace hilbertien.
Preuve :
Soit $e' \in E'$, $h \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} < h, e' > =< jh, e' >_{E,E'} &=< h, j^\star e' >_{\mathcal{H},\mathcal{H}'} \\ &= (\theta j^\star e', h)_{\mathcal{H}} \\ &= (He', h)_{\mathcal{H}}. \end{aligned}$$

He' est bien, pour un e' donné, le seul élément de $\mathcal{H}$ à vérifier cette égalité pour tout $h \in \mathcal{H}$ d'après le théorème 11 de représentation de Riesz Fréchet.
On prend $h = Hf', f' \in E'$
$h \in \mathcal{H}$ et on applique la formule précédente :
$(He', Hf')_{\mathcal{H}} =< Hf', e' >$ $(\star\star)$.
Attention, la formule $(\star\star)$ ne donne pas une caractérisation de H car elle est vraie par exemple pour $H = 0$.

Corollaire 6 *On a défini une application :* $\begin{array}{ccc} Hilb(E) & \longrightarrow & L^+(E) \\ \mathcal{H} & \longmapsto & H \end{array}$
*On l'appelle l'***application canonique** *de Hilb(E) dans $L^+(E)$.*

Proposition 21 *On note $\mathcal{H}_0 = H(E')$.*
1) $\mathcal{H}_0$ est un sous espace dense de $\mathcal{H}$.
2) On peut caractériser $\mathcal{H}_0$ de la manière suivante :
$h \in \mathcal{H}$, h appartient à $\mathcal{H}_0$ si et seulement si la forme linéaire $k \mapsto (k, h)_{\mathcal{H}}$ est continue sur $\mathcal{H}$ pour la topologie induite par la topologie initiale ou la topologie affaiblie de E.

Preuve :
1) <u>Première méthode :</u>
Pour montrer que $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$, on peut montrer que son orthogonal dans $\mathcal{H}$ est $\{0\}$.
Soit $h \in \mathcal{H}$, h orthogonal à $H(E')$,
avec la proposition précédente, on a $(He', h)_{\mathcal{H}} = 0 =< h, e' >$ pour tout $e' \in E'$ donc $h = 0$.
<u>Deuxième méthode :</u>
$\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert donc $\mathcal{H}$ est réflexif. Le dual de $\mathcal{H}'$ est donc $\mathcal{H}$.
D'apès Bourbaki (que je vous laisse le soin d'aller consulter), un sous espace vectoriel de $\mathcal{H}'$ dense pour $\sigma(\mathcal{H}', \mathcal{H})$ est alors dense dans $\mathcal{H}'$ fort.
Montrons que $j^\star E'$ est faiblement dense dans $\mathcal{H}'$.
Soit $h' \in \mathcal{H}', h' \in E'$ et $j^\star$ est injective donc $j^\star h' = h'$ et h' est son propre antécédent.
$j^\star$ est faiblement continue donc
$\forall V \in \mathcal{V}(h') = \mathcal{V}(j^\star h'), \exists U \in \mathcal{V}(h')$ tel que $\forall x \in U, j^\star x \in V$
Or $j^\star x \in j^\star(E')$
On a donc montré que pour tout voisinage de h', il existe un élément de $j^\star(E')$ appartenant à ce voisinage i.e. $j^\star(E')$ est faiblement dense dans $\mathcal{H}'$.

Grâce à Bourbaki, $j^\star(E')$ est fortement dense dans $\mathcal{H}'$.
Comme θ est un isomorphisme, $\theta j^\star(E') = H(E')$ est dense dans $\mathcal{H}$.
2) Soit $h \in \mathcal{H}$ tel que $h \in H(E')$, il existe $e' \in E'$ tel que $h = He'$.
Avec la proposition précédente, $(He', k)_{\mathcal{H}} =< k, e' >$
$k \mapsto (k, h)_{\mathcal{H}}$ est continue sur $\mathcal{H}$ pour la topologie induite par la topologie initiale ou pour la topologie faible. (cela provient de la continuité de e'.)
Réciproquement, si $k \mapsto (k, h)_{\mathcal{H}}$ est continue sur $\mathcal{H}$ pour la topologie induite par celle de E,
d'après le théorème de Hahn Banach, il existe $e' \in E'$ tel que
$\forall k \in \mathcal{H}, (k, h)_{\mathcal{H}} =< k, e' >$
Or $< k, e' >= (He', k)_{\mathcal{H}}$ pour tout k
donc $(k, h)_{\mathcal{H}} = (He', k)_{\mathcal{H}}$
d'où $He' = h$ i.e. $h \in H(E')$.

Corollaire 7 *Si E' est faiblement séparable i.e. admet un sous ensemble dénombrable faiblement dense alors tous les sous espaces hilbertiens de E sont séparables i.e. contiennent un sous ensemble dénombrable dense.*

Preuve : Soit D un sous ensemble dénombrable faiblement dense dans E'.
H est faiblement continue, surjective de E' dans $\mathcal{H}_0 = H(E')$ donc $H(D)$ est faiblement dense dans $H(E') \subset \mathcal{H}$ qui est un espace de hilbert
donc $H(D)$ est fortement dense dans $\mathcal{H}_0$
Or $\mathcal{H}_0$ est dense dans $\mathcal{H}$
donc $H(D)$ est dense dans $\mathcal{H}$ i.e. $\mathcal{H}$ est séparable.

Proposition 22 *Soit $\mathcal{H}$ un sous espace hilbertien de E, H son noyau.*
Alors un élément h de $E'^\star$ appartient à $\mathcal{H}$ si et seulement si $\sup_{e' \in E'} \dfrac{|< h, e' >|}{(< He', e' >)^{\frac{1}{2}}} < \infty$
et dans ce cas, on a
$\| h \|_{\mathcal{H}} = \sup_{e' \in E'} \dfrac{|< h, e' >|}{(< He', e' >)^{\frac{1}{2}}}$

Preuve :
1) Si $h \in \mathcal{H}$, on a avec la proposition 20
$$\begin{aligned} |< h, e' >| = |(h, He')_{\mathcal{H}} \quad &\leq \| h \|_{\mathcal{H}} \| He' \|_{\mathcal{H}} \\ &= \| h \|_{\mathcal{H}} < He', e' >^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$
Si $< He', e' >^{\frac{1}{2}} = 0$ alors $|< h, e' >| = 0$
Sinon, $\frac{|<h,e'>|}{(<He',e'>)^{\frac{1}{2}}} \leq \| h \|_{\mathcal{H}}$ donc $\sup_{e' \in E'} \dfrac{|< h, e' >|}{(< He', e' >)^{\frac{1}{2}}}$ est un nombre fini, majoré par $mid \mid h \|_{\mathcal{H}}$.
2) réciproquement, supposons que $\sup_{e' \in E'} \dfrac{|< h, e' >|}{(< He', e' >)^{\frac{1}{2}}} < \infty$
$e' \mapsto < h, e' >$ est nulle sur l'ensemble des e' tels que $He' = 0$ et c'est une application linéaire.
On considère $\begin{array}{ccc} H(E') & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ He' & \mapsto & < h, e' > \end{array}$, c'est une forme linéaire dont la norme est inférieure ou égale à $l(h) = \sup_{e' \in E'} \dfrac{|< h, e' >|}{\| He' \|_{\mathcal{H}}}$.
On applique le théorème d'Hahn Banach,
$\exists k \in \mathcal{H}$ tel que $< h, e' >= (k, He')_{\mathcal{H}}$ et $\| k \| \leq l(h)$.
Avec la proposition 20., $< h, e' >=< k, e' >$ pour tout $e' \in E'$
donc $k = h$ donc $h \in \mathcal{H}$.
De plus, $\| h \|_{\mathcal{H}} \leq l(h)$ et avec l'inégalité de 1), $\| h \|_{\mathcal{H}} = l(h)$.

Corollaire 8 *L'application canonique de Hilb(E) dans $L^+(E)$ est injective.*

Preuve :
D'après la proposition 22, la connaissance de H détermine $\mathcal{H}$ avec sa structure hilbertienne.

Corollaire 9 *Si $h \in E'^\star$ vérifie* $\sup_{e' \in E'} \dfrac{|< h, e' >|}{(< He', e' >)^{\frac{1}{2}}} < \infty$ *alors $h \in E$.*

Preuve :
On a alors $h \in \mathcal{H}$ et $\mathcal{H} \subset E$.

Proposition 23 *Soit* $B_0 = \{He', e' \in E', < He', e' > \leq 1\}$,
On note $\overline{B_0}$ *son adhérence dans* E.
Alors $\mathcal{H} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}^+} \lambda \overline{B_0}$.

Ceci donne une nouvelle caractérisation de $\mathcal{H}$ à partir de H.

<u>Référence :</u>

Schwartz L. : Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants), J. Anal. Math., 13, p.115-256 (1964).